

Приложение к журналу

# КВАНТ

№2/99

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ  
ПО ФИЗИКЕ

Бюро



Квантум

**МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ  
ПО ФИЗИКЕ**

*Составитель В.А.Тихомирова*



---

Москва 1999  
Бюро «Квантум»

УДК 373.167.1:53  
ББК 22.3 я 721  
М33

Приложение  
к журналу «Квант»  
№2/99

Под редакцией А.И.Черноуцана

**М33    Материалы для абитуриентов по физике** / Составитель  
В.А.Тихомирова. — М.: Бюро Квантум, 1999. — 128 с.  
(Прил. к журналу «Квант» №2/99)  
ISBN 5-85843-017-1

В книгу включены две главы, не вошедшие в сборник задач «Материалы вступительных экзаменов по физике», а также статьи по физике, опубликованные в журнале «Квант» в разделе «Практикум абитуриента» в течение последних лет.

Для старшеклассников и выпускников средних школ, лицеев и гимназий, для слушателей подготовительных отделений и курсов, а также для всех тех, кто самостоятельно готовится к конкурсным экзаменам в вузы.

ББК 22.3 я721

ISBN 5-85843-017-1

© Бюро Квантум  
«Квант», 1999

Предисловие	4
<b>Часть I. Материалы вступительных экзаменов по физике (окончание)</b>	
<b>Глава 5. Колебания и волны</b>	
Механические колебания и волны	5
Электромагнитные колебания и волны	11
<b>Глава 6. Квантовая физика</b>	
Световые кванты	16
Атом и атомное ядро	18
<b>Часть II. Практикум абитуриента</b>	
Движение по окружности: равномерное и неравномерное. <i>В. Чивилёв</i>	20
Задачи на центр масс. <i>А. Черноуцан</i>	28
Задачи с распределенной массой. <i>А. Черноуцан</i>	36
Период гармонических колебаний. <i>В. Чивилёв</i>	43
Теорема об изменении кинетической энергии. <i>А. Овчинников, В. Плис</i>	51
Теплоемкость идеального газа. <i>А. Шеронов</i>	59
Когда кипит вода? <i>В. Белонучкин</i>	65
Фазовые переходы. <i>А. Шеронов</i>	71
Потенциал электростатического поля. <i>В. Можаяев</i>	80
Катушки индуктивности в электрических цепях. <i>В. Можаяев</i>	90
Геометрическая оптика. <i>Ю. Чешев</i>	100
Интерференция света. <i>Ю. Чешев</i>	108
Ядерная физика в задачах. <i>Ю. Самарский</i>	116
<b>Ответы</b>	122

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В первую часть этой книги включены главы «Колебания и волны» и «Квантовая физика», не вошедшие в сборник «Материалы вступительных экзаменов по физике» (Приложение к журналу «Квант» №1/99).

Задачи скомпонованы не по вузам (как на страницах журнала), а по темам, но после каждой задачи в скобках указан номер соответствующего вуза: 1 — Государственная академия нефти и газа им. И.М.Губкина, 2 — Московский государственный авиационный институт, 3 — Московский государственный авиационный технологический университет им. К.Э.Циолковского, 4 — Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, 5 — Московский государственный инженерно-физический институт, 6 — Московский государственный институт электроники и математики, 7 — Московский государственный институт электронной техники, 8 — Московский педагогический государственный университет, 9 — Московский физико-технический институт, 10 — Московский энергетический институт, 11 — Новосибирский государственный университет, 12 — Санкт-Петербургский государственный технический университет, 13 — Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет, 14 — Физико-математический колледж при «Курчатовском институте». Мы не стремились к единому стилю в формулировках задач — напротив, сохранены наиболее характерные особенности конкретного вуза (связанные, в частности, с типом вступительного экзамена — устный, письменный, машинный).

Во второй части книги собраны статьи по физике из раздела «Практикум абитуриента», опубликованные в «Кванте» в последние годы.

# ЧАСТЬ I. МАТЕРИАЛЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО ФИЗИКЕ (ОКОНЧАНИЕ)

## ГЛАВА 5. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

### МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**5.1.** Напишите уравнение гармонических колебаний груза массой  $m = 100$  г, подвешенного к пружине жесткостью  $k = 10$  Н/м, если амплитуда колебаний  $A = 30$  мм, а начальная фаза  $\varphi_0 = \pi/4$ . (2)

**5.2.** Небольшое тело совершает гармонические колебания. Зная, что его максимальная скорость равна  $v_m = 9,42$  м/с, найдите величину средней скорости тела за время, в течение которого оно перемещается из одного крайнего положения в другое. (7)

**5.3.** Через сколько секунд от начала движения точка, совершающая колебания по закону  $x = A \sin \omega t$ , сместится от положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний 36 с. (1)

**5.4.** Пружинный маятник совершает колебания, уравнение которых  $x = 4 \cos(\pi t + \pi/3)$  (см). Определите скорость и ускорение маятника через  $t = 20$  с после начала движения. Масса маятника  $m = 200$  г. (6)

**5.5.** Две точки совершают гармонические колебания. Максимальная скорость первой точки 3 м/с. Какова максимальная скорость второй точки, если период ее колебаний в 3 раза больше, а амплитуда колебаний в 6 раз больше, чем у первой? (1)

**5.6.** Две материальные точки совершают гармонические колебания: первая – с циклической частотой  $27 \text{ с}^{-1}$ , вторая – с циклической частотой  $9 \text{ с}^{-1}$ . Во сколько раз максимальное ускорение первой точки больше максимального ускорения второй, если амплитуды колебаний точек одинаковы? (1)

**5.7.** Два математических маятника, длины которых отличаются на  $l_1 - l_2 = 22$  см, совершают в одном и том же месте за некоторое время один  $N_1 = 30$  колебаний, другой  $N_2 = 36$  колебаний. Найдите длины маятников. (12)

**5.8.** Небольшой груз подвешен на легкой пружине. На сколько миллиметров укоротится пружина после снятия груза, если собственная циклическая частота колебаний груза на этой пружине равна  $20 \text{ с}^{-1}$ ? (10)

**5.9.** Как изменится период колебаний математического маятника, если его поместить в воду? Маятнику придана идеально обтекаемая форма, так что силой трения можно пренебречь. (10)

**5.10.** Шарик массой  $50 \text{ г}$ , подвешенный на пружине, совершает гармонические колебания с амплитудой  $10 \text{ см}$ . Чему равна максимальная величина возвращающей силы (в мН), действующей на шарик, если циклическая частота колебаний равна  $4 \text{ с}^{-1}$ ? (1)

**5.11.** Смещение (в см) груза, подвешенного на пружине, в зависимости от времени задается законом  $x(t) = 8 \cos(10t + \pi/4)$ . При этом максимальная кинетическая энергия груза равна  $0,8 \text{ Дж}$ . Найдите жесткость пружины. (3)

**5.12.** Пружинный маятник вывели из положения равновесия и отпустили. Через какое время (в мс) кинетическая энергия колеблющегося тела будет в первый раз равна потенциальной энергии пружины? Период колебаний равен  $200 \text{ мс}$ . (1)

**5.13.** На легкой нерастяжимой нити подвешен маленький шарик. Период малых колебаний такого маятника  $T = 1,3 \text{ с}$ . На какой максимальный угол будет отклоняться нить от вертикали, если при колебаниях шарик, проходя положение равновесия, движется со скоростью  $v = 2,1 \text{ м/с}$ ? (4)

**5.14.** На горизонтальной пружине укреплено тело массой  $M = 10 \text{ кг}$ , лежащее на абсолютно гладком столе. В это тело попадает и застревает в нем пуля массой  $m = 10 \text{ г}$ , летящая со скоростью  $v = 500 \text{ м/с}$  вдоль оси пружины. Тело вместе с застрявшей в нем пулей начинает колебаться с амплитудой  $A = 10 \text{ см}$ . Найдите период колебаний. (6)

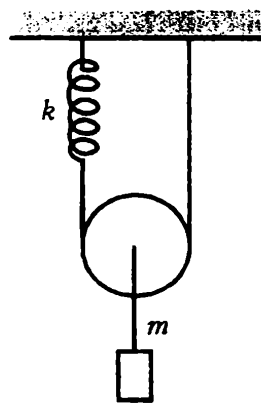


Рис. 1

**5.15.** К оси невесомого блока на жестком стержне подвешен груз (рис.1). Масса стержня и груза  $m$ . Блок подвешен на нити, один конец которой прикреплен к потолку непосредственно, а другой — через невесомую пружину жесткостью  $k$ . Груз совершает малые незатухающие колебания вдоль вертикали. Найдите период этих колебаний. (4)

**5.16.** Тело массой  $m = 100 \text{ г}$  падает с высоты  $h = 5 \text{ м}$  на чашу пружинных весов

(рис.2) и сжимает пружину жесткостью  $k = 10^3 \text{ Н/м}$  на величину  $x$ . Определите  $x$ , если массы чаши и пружины весов пренебрежимо малы. (4)

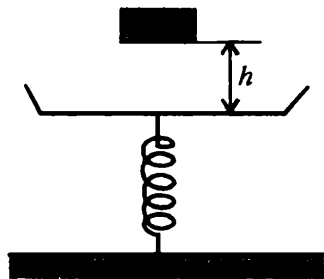


Рис. 2

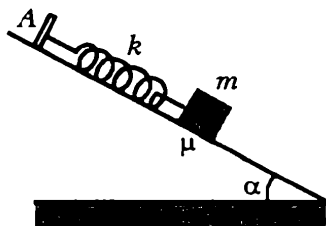


Рис. 3

**5.17.** На наклонной плоскости с углом  $\alpha$  находится кубик (рис.3). К кубiku прикреплена невесомая пружина, другой конец которой закреплен в неподвижной точке А. В исходном состоянии кубик удерживается в положении, при котором пружина не деформирована. Кубик отпускают без начальной скорости. Определите максимальную скорость кубика в процессе движения. Масса кубика  $m$ , жесткость пружины  $k$ , коэффициент трения кубика о наклонную плоскость  $\mu$  ( $\mu < \text{tg} \alpha$ ). (4)

**5.18.** На пружине жесткостью  $k$  висят два груза, связанные нитью (рис.4). После пережигания нити верхний груз стал колебаться с амплитудой  $A$ . Найдите массу нижнего груза. (9)

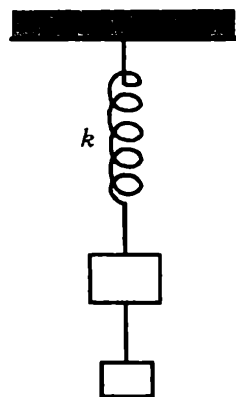


Рис. 4

**5.19.** Тележка движется горизонтально с постоянной скоростью. Вместе с тележкой движется лежащий на ней брусок, который прикреплен к задней стенке тележки при помощи пружины (рис.5). Расстояние от бруска до передней стенки тележки  $l = 0,1 \text{ м}$ . При внезапной остановке тележки брусок продолжает двигаться по инерции. При какой минимальной скорости тележки  $v$  брусок достигнет ее передней стенки? Частота свободных колебаний бруска на пружине  $\nu = 2 \text{ Гц}$ . Трением пренебречь. (4)

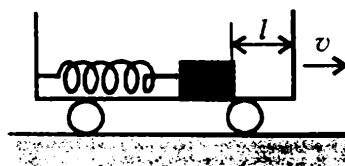


Рис. 5

**5.20.** Доска с лежащим на ней бруском находится на гладкой горизонтальной поверхности стола



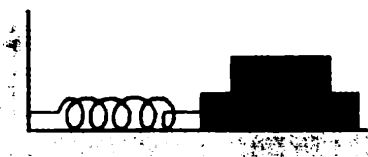


Рис. 6

(рис.6). Система совершает колебания под действием упругой пружины вдоль прямой с периодом  $T = 1$  с и максимальным значением скорости  $v_m = 0,5$  м/с. При этом доска и брусок неподвижны друг относительно друга. При каких значениях коэффициента трения скольжения между доской и бруском такие колебания возможны? (9)

**5.21.** В неподвижной горизонтальной трубе, внутренний радиус которой  $R$ , катается без проскальзывания вблизи положения равновесия отрезок тонкостенной трубы радиусом  $r \ll R$ . Оси труб параллельны. Найдите период колебаний с малой амплитудой. (4)

**5.22.** Тонкостенный обруч может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр (рис.7). Радиус обруча  $R$ , масса  $M$ . К внутренней поверхности обруча прикреплен маленький шарик, масса которого  $m$ . Определите период малых колебаний обруча вблизи положения равновесия. Спицы невесомы. Трение не учитывайте. (4)

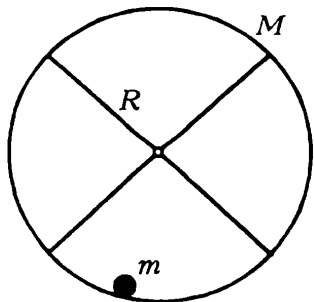


Рис. 7

**5.23.** К грузу массой  $M$ , висящему на легкой пружине жесткостью  $k$ , на нити подвешен второй груз так, что центры масс грузов лежат на одной вертикали, совпадающей с осью пружины. После пережигания нити первый

груз совершает гармонические колебания, при которых амплитуда его скорости равна  $v_m$ . Найдите массу второго груза. (4)

**5.24.** На гладкой горизонтальной плоскости лежат две одинаковые шайбы, скрепленные невесомой пружиной, ось которой совпадает с прямой, проходящей через центры масс шайб.

Удерживая первую шайбу, вторую немного смещают вдоль оси пружины и отпускают. При этом максимальная скорость второй шайбы в возникшем колебательном процессе равна  $v$ . Какую максимальную скорость будет иметь вторая шайба, если в момент, когда ее скорость равна нулю, отпустить первую шайбу? (4)

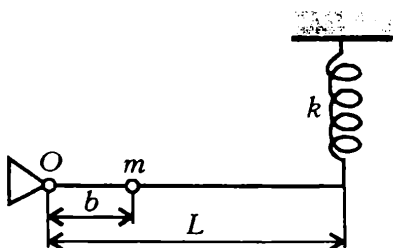


Рис. 8

**5.25.** Один конец жесткой невесомой штанги длиной  $L$  шарнирно закреплен в точке  $O$ , а к ее другому концу прикреплена пружина жесткостью  $k$  (рис.8). На расстоянии  $b$  от точки  $O$  на штанге закреплен небольшой по размерам груз массой  $m$ . В положении равновесия штанга горизонтальна, а ось пружины вертикальна. Найдите период малых колебаний груза в вертикальной плоскости. (4)

**5.26.** Конструкция из жестко соединенных легкого стержня и небольшого по размерам шарика массой  $m$  может совершать колебания под действием пружины жесткостью  $k$ , двигаясь при вращении без трения вокруг горизонтальной оси  $O$  в вертикальной плоскости (рис.9). Пружина легкая, ее точка прикрепления к стержню делит его длину в отношении 1:2, считая от шарика. В положении равновесия стержень горизонтален, а ось пружины вертикальна. 1) Найдите удлинение пружины в положении равновесия системы. 2) Найдите период малых колебаний конструкции. (9)

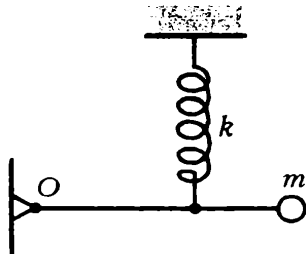


Рис. 9

**5.27.** Однородный цилиндр длиной  $l$  плавает в вертикальном положении на границе двух не смешивающихся жидкостей с плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и делится этой границей пополам. Пренебрегая трением, найдите период малых вертикальных колебаний цилиндра. (6)

**5.28.** В закрытом горизонтальном цилиндрическом сосуде длиной  $2L$  находится  $\nu$  молей идеального газа при температуре  $T$ . Цилиндр разделен пополам тонким гладким поршнем массой  $m$ . Найдите круговую частоту малых колебаний поршня, считая процесс изотермическим. (12)

**5.29.** Маленький грузик массой  $m$  на пружине жесткостью  $k$  совершает гармонические колебания относительно главной оптической оси тонкой плоско-вогнутой линзы с фокусным расстоянием  $-F$  ( $F > 0$ ). Линза плотно прижата к вертикально расположенному плоскому зеркалу (рис.10). Расстояние от грузика до зеркала  $L = 4,5F$ .

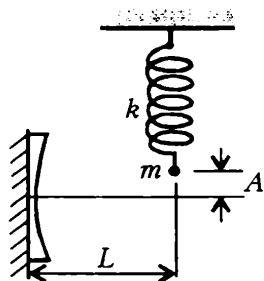


Рис. 10

1) На каком расстоянии от зеркала находится изображение грузика в данной оптической системе? 2) С какой скоростью изображение грузика пересекает главную опти-

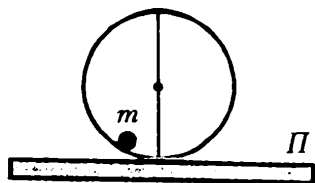


Рис. 11

ческую ось линзы, если амплитуда его колебаний равна  $A$ ? (9)

**5.30.** Тонкостенный непроводящий цилиндр с гладкой внутренней поверхностью неподвижно лежит на горизонтально расположенной непроводящей пластине  $\Pi$  (рис. 11). Размеры пластины (в горизонтальной плоскости) много

больше радиуса цилиндра. Известно, что отношение периода колебаний маленького отрицательно заряженного шарика внутри цилиндра при некоторой положительной плотности поверхностных зарядов  $\sigma_x$  пластины к периоду колебаний при  $\sigma = 0$  равно  $\alpha$ . Определите  $\sigma_x$ , считая заданными  $\alpha$ ,  $q$  – заряд шарика,  $m$  – его массу и  $g$  – ускорение свободного падения. (9)

**5.31.** Тонкий проводящий стержень длиной  $L$  и массой  $m$  подвесили в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  горизонтально за концы на одинаковых легких пружинах жесткостью  $k$  каждая. Линии магнитной индукции направлены горизонтально и перпендикулярно оси стержня. Затем через стержень пропустили прямоугольный импульс тока с амплитудой  $I$  и столь малой длительностью  $\tau$ , что за время его действия стержень не успел заметно сместиться от положения равновесия. Найдите амплитуду возникших колебаний стержня, пренебрегая влиянием воздуха. (5)

**5.32.** В модели атома Томсона предполагалось, что положительный заряд  $q$ , равный по модулю заряду электрона, равномерно распределен внутри шара радиусом  $R$ . Чему равен период колебаний (внутри шара, вдоль его диаметра) электрона, помещенного в такой шар? Масса электрона  $m$ . (9)

**5.33.** По струне слева направо бежит поперечная гармоническая волна со скоростью  $v = 40$  м/с. Длина волны  $\lambda = 60$  см, амплитуда  $A = 2$  мм. Найдите ускорение точки  $O$  струны в момент времени, соответствующий рисунку 12. (4)



Рис. 12

**5.34.** Сейсмическая упругая волна частотой  $\nu = 0,5$  Гц и длиной волны  $\lambda = 2,9$  км, падающая под углом  $\alpha = 42^\circ$  на границу раздела между двумя

слоями земной коры с различными свойствами, испытывает преломление, причем угол преломления  $\beta = 26^\circ$ . Найдите скорость волны во второй среде. (4)

**5.35.** Человек стоит на непроводящем резиновом коврике, лежащем на земле, и держится рукой за оголенный провод бытовой электрической сети. Оцените величину тока, проходящего через руку. (11)

**5.36.** По длинному прямолинейному проводу течет переменный ток. В плоскости, проходящей через провод, расположены три проволочных контура, изготовленные из одного куска провода (рис. 13). Контур 1 и 2 являются квадратами со стороной  $a$ , третий контур состоит из двух прямоугольников со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ . В некоторый момент времени токи в контурах 1 и 2 равны, соответственно,  $I_1$  и  $I_2$ . Чему равен в этот момент ток в контуре 3? Пунктирные линии на рисунке параллельны проводу. (9)

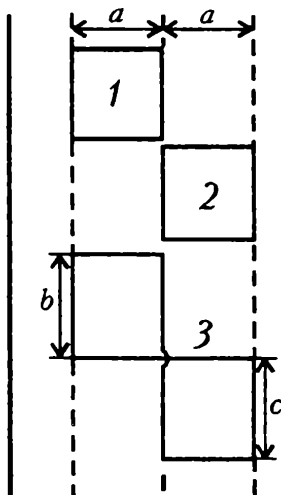


Рис. 13

**5.37.** В электрической схеме, изображенной на рисунке 14, сопротивления всех резисторов одинаковы и равны  $R = 1$  кОм каждое. Источником тока является синусоидальное напряжение с действующим значением  $U_d = 60$  В. Найдите максимальное значение силы тока, протекающего через диод. Сопротивлением источника тока и сопротивлением диода при прямом токе пренебречь. (4)

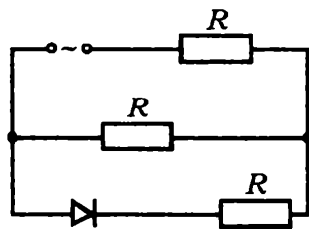


Рис. 14

**5.38.** Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью  $L = 0,2$  Гн и конденсатора емкостью  $C = 10$  мкФ. Конденсатор зарядили до напряжения  $U_0 = 2$  В и замкнули цепь контура. Найдите силу тока в контуре в тот момент, когда энергия колебаний распределилась поровну между электрическим и магнитным полями. Затухание не учитывать. (4)

**5.39.** Колебательный контур состоит из двух одинаковых конденсаторов емкостью  $C$  каждый и катушки индуктивностью  $L$ , соединенных последовательно. В некоторый момент времени один из конденсаторов имеет заряд  $Q$ , а второй не заряжен. Найдите амплитуду силы тока в цепи. (6)

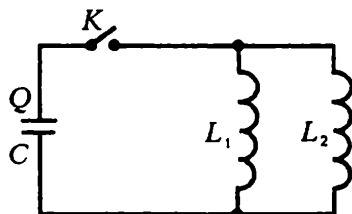


Рис. 15

**5.40.** Найдите максимальные токи в катушках, индуктивности которых  $L_1$  и  $L_2$ , после замыкания ключа  $K$  в цепи (рис. 15). Емкость конденсатора  $C$ , его заряд  $Q$ . (10)

**5.41.** Разность потенциалов между обкладками конденсатора емкостью  $C$  равна  $U$ . Конденсатор разряжается через соленоид индуктивностью  $L$ . Найдите максимальную величину тока в соленоиде. Сопротивлением обмотки соленоида можно пренебречь. (2)

**5.42.** Контур образован двумя параллельными проводниками, замыкающим их соленоидом индуктивностью  $L$  и проводящим стержнем массой  $m$ , который может без трения скользить по проводникам. Проводники расположены в горизонтальной плоскости в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией  $B$ . Расстояние между проводниками  $l$ . В момент  $t = 0$  стержню сообщили скорость  $v_0$ . Найдите закон его движения. Сопротивление контура пренебрежимо мало. (6)

**5.43.** К источнику с ЭДС  $\mathcal{E}$  подключили последовательно соединенные конденсатор, катушку индуктивности и полупроводниковый диод, имеющий в проводящем направлении бесконечно малое, а в обратном направлении – бесконечно большое сопротивление. Пренебрегая сопротивлением источника и проводов, найдите установившееся напряжение на конденсаторе. (4)

**5.44.** В колебательном контуре, состоящем из двух последовательно соединенных катушек индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$  и конденсатора емкостью  $C$ , происходят свободные незатухающие колебания, при которых амплитуда колебаний тока равна  $I_0$  (рис. 16). Когда сила тока в первой катушке максимальна, в

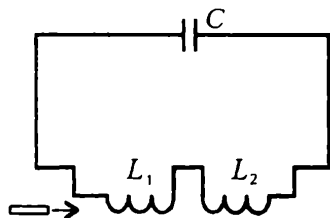


Рис. 16

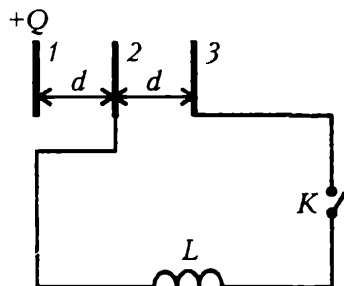


Рис. 17

нее быстро (за время, малое по сравнению с периодом колебаний) вставляют сердечник, что приводит к увеличению ее индуктивности в  $\mu$  раз. 1) Определите максимальное напряжение на конденсаторе до вставки сердечника. 2) Определите максимальное напряжение на конденсаторе после вставки сердечника. (9)

**5.45.** Три одинаковые неподвижные металлические пластины расположены в воздухе на равных расстояниях  $d$  друг от друга (рис.17). Площадь каждой из пластин равна  $S$ . На пластине 1 находится положительный заряд  $Q$ . Пластины 2 и 3 не заряжены и подключены через ключ  $K$  к катушке индуктивностью  $L$ . Определите максимальное значение тока через катушку после замыкания ключа. Расстояние между пластинами мало по сравнению с их размерами. Омическим сопротивлением катушки можно пренебречь. (9)

**5.46.** В схеме, изображенной на рисунке 18, конденсатор емкостью  $C$  заряжают до напряжения  $U$ . Затем ключ  $K$  замыкают. Найдите: а) время перезарядки конденсатора; б) максимальный ток в катушках индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$ . (14)

**5.47.** В цепи, изображенной на рисунке 19, при разомкнутом ключе  $K$  заряд на конденсаторе емкостью  $C_1$  равен  $Q$ , а конденсатор емкостью  $C_2 = 4C_1$  не заряжен. Определите максимальный

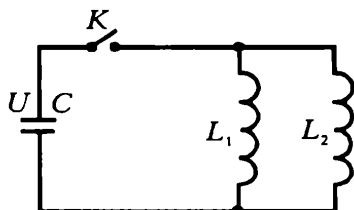


Рис. 18

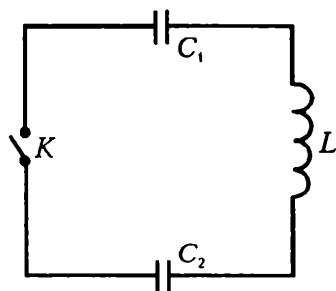


Рис. 19

ток в цепи после замыкания ключа. Омическими потерями в катушке индуктивностью  $L$  пренебречь. (9)

**5.48.** Схема, состоящая из двух лампочек и двух диодов, включена в сеть переменного тока (рис.20). Объясните, почему при замыкании ключа  $K$  лампочки начинают гореть ярче. (11)

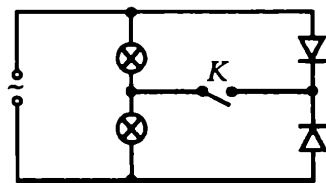


Рис. 20

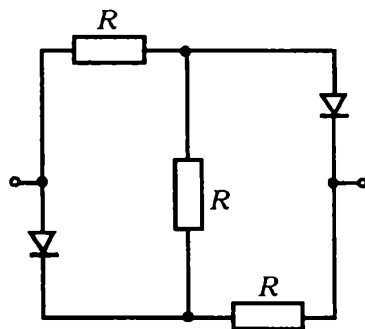


Рис. 21

**5.49.** В сеть переменного тока с напряжением  $U = 220$  В включена схема, состоящая из двух идеальных диодов и трех

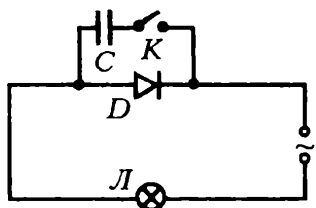


Рис. 22

Рис. 22  
может быть присоединен конденсатор  $C$  (рис.22). При замкнутом ключе лампочка горит заметно ярче, чем при разомкнутом. Объясните явление. (11)

**5.51.** Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника с ЭДС  $\mathcal{E}_0$ , конденсатора емкостью  $C$ , катушки индуктивности с малым омическим сопротивлением и ключа. Вначале ключ разомкнут, а конденсатор не заряжен. Затем ключ замыкают. Какое количество теплоты выделится на омическом сопротивлении за то время, пока электрические колебания в цепи полностью не затухнут? Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением проводов можно пренебречь. (4)

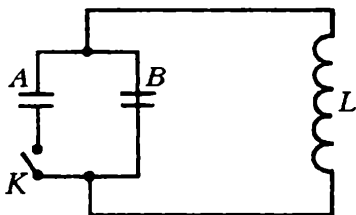


Рис. 23

Рис. 23  
 $B$  не заряжен и ток в катушке отсутствует. Определите максимальное значение силы тока в катушке после замыкания ключа. (12)

**5.53.** Катушка индуктивностью  $L = 0,3$  Гн, имеющая сопротивление  $R = 0,01$  Ом, соединена параллельно с резистором сопротивлением  $R_1 = 1$  кОм и подключена к источнику с ЭДС  $\mathcal{E} = 4$  В и внутренним сопротивлением  $r = 2$  Ом. 1) Какое суммарное количество теплоты выделится в катушке и резисторе после отключения источника тока?

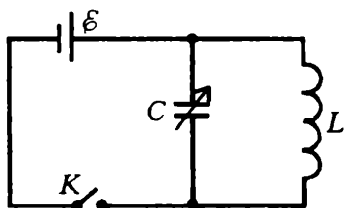


Рис. 24

2) Изменится ли это количество теплоты, если параллельно резистору включить еще и конденсатор? (13)

**5.54.** Конденсатор переменной емкости заряжается от источника с ЭДС  $\mathcal{E} = 0,5$  В и после размыкания ключа  $K$  разряжается через катушку

индуктивностью  $L = 3,3 \text{ Гн}$  (рис. 24). Постройте график зависимости энергии колебательного контура от емкости конденсатора. Определите амплитудное значение заряда на конденсаторе и частоту возникших колебаний при  $C = 3 \cdot 10^3 \text{ пФ}$ . (6)

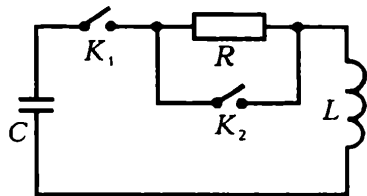


Рис. 25

**5.55.** Конденсатор емкостью  $C$  после замыкания ключа  $K_1$  начинает разряжаться через резистор сопротивлением  $R$  и катушку индуктивностью  $L$  (рис. 25). В момент, когда ток в цепи достигает максимального значения  $I_0$ , замыкают ключ  $K_2$ . Чему равны напряжение на катушке непосредственно перед замыканием ключа  $K_2$  и максимальный ток в цепи при последующих колебаниях? (11)

**5.56.** В колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивностью  $L = 1 \text{ Гн}$  и конденсатора емкостью  $C = 1 \text{ мкФ}$  с утечкой (омическое сопротивление диэлектрика, заполняющего конденсатор, составляет  $R = 10^3 \text{ Ом}$ ), происходят затухающие колебания. В некоторый момент времени амплитуда (максимальное значение) напряжения на конденсаторе была  $U_0 = 2 \text{ В}$ . Какое количество теплоты выделится на конденсаторе от этого момента времени до полного затухания колебаний в контуре? (9)

**5.57.** В колебательном контуре происходят свободные колебания, при которых максимальный заряд на обкладках конденсатора  $q_m = 10^{-7} \text{ Кл}$ , а максимальная сила тока  $I_m = 0,1 \text{ А}$ . Найдите длину электромагнитной волны, соответствующую этим колебаниям. (4)

**5.58.** Емкость конденсатора колебательного контура может изменяться в пределах от  $C_1$  до  $C_2 = 25C_1$ . Емкости  $C_1$  соответствует частота колебаний  $\nu_1 = 70 \text{ МГц}$ . Каков диапазон длин волн, на которые может быть настроен этот контур? (4)

**5.59.** Первичная обмотка повышающего трансформатора с коэффициентом трансформации  $k = 3$  включена в городскую сеть с напряжением  $U_1 = 220 \text{ В}$ , а ко вторичной обмотке, имеющей сопротивление  $r = 20 \text{ Ом}$ , подключен резистор. Напряжение на зажимах вторичной обмотки равно  $U_2 = 650 \text{ В}$ . Пренебрегая потерями и сопротивлением первичной обмотки, определите сопротивление резистора. (4)

**5.60.** Первичная обмотка трансформатора имеет  $N_1 = 2,4 \cdot 10^3$  витков. Сколько витков должна иметь вторичная обмотка, чтобы при напряжении на зажимах  $U = 11 \text{ В}$  передавать во внешнюю цепь мощность  $P = 22 \text{ Вт}$ ? Сопротивление вторичной обмотки  $R = 0,2 \text{ Ом}$ . Напряжение в сети  $U_1 = 380 \text{ В}$ . (6)



## СВЕТОВЫЕ КВАНТЫ

**6.1.** Мощность излучения лазера  $P = 100$  Вт, длина волны излучения  $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-6}$  м. Определите число фотонов, испускаемых лазером в единицу времени. Постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, скорость света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. (6)

**6.2.** Фотоэлемент облучается монохроматическим желтым светом с длиной волны  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$  м. За некоторое время фотоэлемент поглотил энергию  $W = 10^{-5}$  Дж. Найдите число поглощенных фотонов. Постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. (4)

**6.3.** Лазер излучает свет с длиной волны  $\lambda = 495$  нм, потребляя мощность  $P = 40$  Вт. Сколько фотонов ежесекундно излучает лазер, если в энергию света переходит  $\eta = 10\%$  потребляемой энергии? Постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. (4)

**6.4.** Катод  $K$  и анод  $A$  фотоэлемента представляют собой две пластины площадью  $S$  каждая, находящиеся на расстоянии  $d$

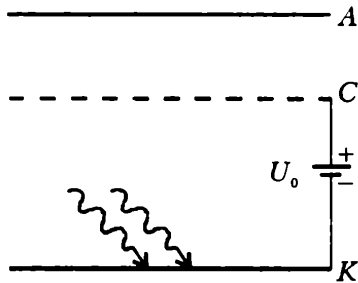


Рис. 26

друг от друга (рис.26). На расстоянии  $2d/3$  от катода размещена проволочная сетка  $C$ . Между сеткой и катодом подано напряжение  $U_0$ , полярность указана на рисунке. Какой максимальный заряд может накопиться на аноде, если катод облучить светом частотой  $\nu$ ? Работа выхода материала катода  $A$ , постоянная Планка  $h$ , заряд электрона  $e$ . (11)

**6.5.** Катод фотоэлемента освещается ультрафиолетовыми лучами с длиной волны  $\lambda = 350$  нм. Для того чтобы фотоэлектроны не достигали анода, между анодом и катодом нужно приложить напряжение  $U > 1,55$  В. Найдите работу выхода электронов из материала катода. Постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. (4)

**6.6.** Оцените постоянную Планка, если фотоэлектроны, вырывающиеся с поверхности металла светом с частотой  $\nu_1 = 1,2 \cdot 10^{15}$  Гц, задерживаются напряжением  $U_1 = 3,1$  В, а вырывающиеся светом с длиной волны  $\lambda_2 = 125$  нм – напряжением  $U_2 = 8,1$  В. Скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с, элементарный заряд  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. (7)

**6.7.** Уединенный шарик радиусом  $r = 5$  мм осветили светом с длиной волны  $\lambda_1 = 250$  нм. Сколько электронов покинет шарик, если его дополнительно осветить светом с длиной волны  $\lambda_2 = 200$  нм? Постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с, заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м. (6)

**6.8.** Электромагнитное излучение с длиной волны  $\lambda = 0,3$  мкм падает на фотоэлемент, находящийся в режиме насыщения. Известно, что при падающем на фотокатод световом потоке  $P = 1$  Вт сила тока насыщения равна  $I = 4,8 \cdot 10^{-3}$  А. Найдите выход фотоэлектронов, т.е. число фотоэлектронов на каждый падающий фотон. Постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. (6)

**6.9.** Катод вакуумного фотоэлемента освещается лучом лазера, работающего на длине волны  $\lambda = 630$  нм и дающего мощность излучения  $P = 4$  мВт. Определите величину силы тока насыщения фотоэлемента. Заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, скорость света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с, постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж·с. (6)

**6.10.** Излучение аргонового лазера с длиной волны  $\lambda = 500$  нм сфокусировано на плоском фотокатode в пятно диаметром  $d = 0,1$  мм. Работа выхода фотокатода  $A = 2$  эВ. На анод, расположенный на расстоянии  $L = 30$  мм от катода, подано ускоряющее напряжение  $U = 4$  кВ. Найдите диаметр пятна фотоэлектронов на аноде. Анод считайте плоским и расположенным параллельно поверхности катода. Постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. (12)

**6.11.** Серебряная пластинка ( $A = 4,7$  эВ) освещена монохроматическим излучением с длиной волны  $\lambda = 180$  нм. Определите максимальный импульс, передаваемый поверхности пластинки при вырывании фотоэлектрона. Масса электрона  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг, постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. (6)

**6.12.** При некотором максимальном значении задерживающей разности потенциалов на вакуумном фотоэлементе фототок с поверхности катода, освещаемого светом с длиной волны  $\lambda_0$ , прекращается. Если изменить длину волны света в  $\alpha = 2$  раза, то для прекращения фототока необходимо увеличить задержива-

ющую разность потенциалов в  $\beta = 3$  раза. Определите длину волны  $\lambda_0$ , если известно, что работа выхода материала катода  $A = 1,89$  эВ, постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с, скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. (9)

**6.13.** Небольшой металлический шарик освещается светом с длиной волны 250 нм. Определите, в каких пределах может изменяться импульс, который получает шарик при поглощении одного фотона с последующим вылетом электрона, если красная граница фотоэффекта для этого металла 255 нм. (3)

**6.14.** С какой скоростью растет толщина покрытия стенки серебром при напылении, если атомы серебра, обладая энергией  $E = 10^{-17}$  Дж, производят давление на стенку  $p = 0,1$  Па? Атомная масса серебра  $A = 108$ , его плотность  $\rho = 10,5$  г/см<sup>3</sup>. (12)

**6.15.** Кусочек металлической фольги массой  $m = 1$  мг освещается лазерным импульсом мощностью  $P = 15$  Вт и длительностью  $\tau = 0,05$  с. Свет падает на плоскость фольги нормально и полностью отражается от нее. Какую скорость приобретет фольга под действием света? Скорость света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. (3)

**6.16.** На плоскую поверхность тонкой плоско-выпуклой положительной линзы нанесено абсолютно отражающее покрытие. На выпуклую поверхность этой линзы падает узкий пучок импульсного лазерного излучения с энергией  $E = 4$  Дж и длительностью импульса  $\tau = 10^{-8}$  с. Падающий пучок распространяется параллельно главной оптической оси линзы на расстоянии  $F/2\sqrt{3}$  от оси ( $F$  – фокусное расстояние линзы). Найдите величину средней силы, действующей на линзу со стороны света, если половина энергии лазерного излучения поглощается в линзе. Отражением от поверхности линзы (без покрытия) можно пренебречь. Скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. (9)

### АТОМ И АТОМНОЕ ЯДРО

**6.17.** В вакуумной трубке находится смесь атомарного водорода и неона. Определите максимальную длину волны излучения, которое сможет вызвать ионизацию этих газов. Энергия ионизации водорода  $E_1 = 13,6$  эВ, неона  $E_2 = 21,6$  эВ. Заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с, скорость света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. (6)

**6.18.** Неподвижный атом водорода испустил фотон с длиной волны  $\lambda = 121,5$  нм. Какую скорость приобрел при этом атом водорода? Масса атома водорода  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг, постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с. (7)

**6.19.** Частица массой  $2m$ , летевшая со скоростью  $v$  и имевшая внутреннюю энергию  $W_0$ , распалась на два осколка одной и той

же массы  $m$  с одинаковыми внутренними энергиями  $W_1$ . Найдите максимально возможный угол разлета осколков, если известно, что  $mv^2 > W_0$ . (12)

**6.20.** Протон массой  $m_p$  налетает со скоростью  $v_0$  по прямой с большого расстояния на покоящееся ядро некоторого химического элемента и упруго рассеивается на нем. Оказалось, что после такого взаимодействия разлетевшиеся частицы имеют равные по величине и противоположные по направлению скорости. Найдите эти скорости и массу ядра. Какому химическому элементу принадлежит это ядро? (11)

**6.21.** При бомбардировке изотопа бора  $^{10}_5\text{B}$   $\alpha$ -частицами образуется изотоп азота  $^{13}_7\text{N}$ , который радиоактивен и распадается с испусканием позитронов. Напишите соответствующие ядерные реакции. (3) •

**6.22.** Реакцию синтеза тяжелого изотопа водорода (дейтерия) и сверхтяжелого (трития):  $^2\text{H} + ^3\text{H} = ^4\text{He} + n$  изучают, направляя ускоренные до энергии  $E = 2$  МэВ ядра дейтерия на тритиевую мишень. Детектор регистрирует нейтроны, вылетающие перпендикулярно направлению пучка ядер дейтерия. Определите энергию регистрируемых нейтронов, если в реакции выделяется энергия  $Q = 14$  МэВ. (12)

## ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ: РАВНОМЕРНОЕ И НЕРАВНОМЕРНОЕ

В. Чивилёв

В этой статье на конкретных задачах обсуждаются вопросы динамики равномерного и неравномерного движений по окружности. Все разобранные задачи (кроме второй) и задачи из Упражнений составлены автором статьи и предлагались в разные годы на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт (МФТИ). Но сначала – немного теории.

Пусть тело (материальная точка) движется (вращается) по окружности. Угловой скоростью вращения  $\omega$  называется предел отношения угла поворота  $\Delta\varphi$  радиуса, проходящего через тело, ко времени  $\Delta t$  поворота на этот угол при стремлении  $\Delta t$  к нулю:  $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Угол поворота принято измерять в радианах, поэтому угловая скорость в СИ измеряется в  $1/\text{с}$  (или  $\text{с}^{-1}$ ). Модуль скорости  $V$  при движении по окружности называют линейной скоростью. Линейная и угловая скорости в любой момент времени связаны соотношением  $V = \omega R$ , где  $R$  – радиус окружности.

Движение по окружности называется равномерным, если линейная скорость, а значит, и угловая остаются постоянными; в противном случае движение называется неравномерным. Для равномерного движения по окружности вводятся также период и частота вращения. Период  $T$  – это время одного оборота, частота  $\nu$  – число оборотов в единицу времени. Легко показать, что  $T = 1/\nu$  и  $\omega = 2\pi\nu$ .

Ускорение при равномерном движении по окружности находится по формуле

$$a = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R.$$

Оно всегда направлено к центру окружности и называется поэтому центростремительным ускорением. По второму закону Ньютона центростремительное ускорение  $\vec{a}$  вызвано суммой  $\vec{F}$

всех сил, действующих на тело со стороны других тел (и полей):

$$\vec{F} = m \vec{a}.$$

Поскольку при равномерном движении по окружности ускорение тела  $\vec{a}$  направлено к центру вращения (окружности), то и сила  $\vec{F}$  направлена к центру вращения и называется поэтому центростремительной силой. Подчеркнем, что центростремительная сила – это не какая-то особая, мистическая сила, появляющаяся в результате вращения, а сумма всех сил, реально действующих на равномерно движущиеся по окружности тело со стороны других тел. Следовательно, начинать решение конкретной задачи на вращение надо с изображения реальных сил, действующих на тело, а не с центростремительной силы.

При неравномерном движении по окружности вектор ускорения  $\vec{a}$  не направлен к центру вращения, и его удобно разложить на две составляющие (рис.1). Составляющая  $\vec{a}_t$ , направленная по касательной к траектории, называется касательным (тангенциальным) ускорением. Оно характеризует быстроту изменения модуля скорости. Составляющая  $\vec{a}_n$ , направленная по нормали к траектории, т.е. вдоль радиуса, к центру вращения  $O$ , называется нормальным (центростремительным) ускорением. Оно отвечает за изменение направления скорости тела. Его модуль в любой момент времени можно найти по формуле

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R,$$

где  $V$  и  $\omega$  – линейная и угловая скорости в этот момент. Из рисунка видно, что при неравномерном движении по окружности проекция ускорения  $\vec{a}$  на ось  $X$ , направленную вдоль радиуса к центру вращения, всегда равна  $a_n$ . На этом основано решение многих задач на неравномерное движение по окружности.

**Задача 1.** Вокруг вертикально расположенного стержня вращает-

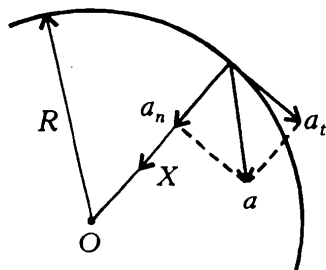


Рис. 1

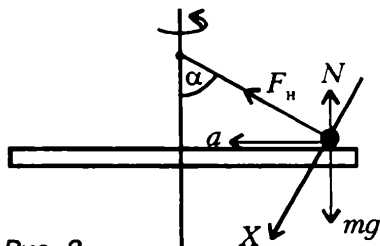


Рис. 2

ся насаженный на него диск (рис.2). На диске находится шарик, прикрепленный к стержню нитью длиной  $l$  и составляющей угол  $\alpha$  со стержнем. С каким периодом должна вращаться система, чтобы шарик не отрывался от диска?

Шарик движется равномерно по окружности радиусом  $l \sin \alpha$  с угловой скоростью  $2\pi/T$  и ускорением

$$a = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 l \sin \alpha,$$

где  $T$  – период вращения. На шарик действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила натяжения нити  $\vec{F}_n$  и сила нормальной реакции  $\vec{N}$  со стороны диска. Уравнение второго закона Ньютона (уравнение движения) имеет вид

$$m\vec{g} + \vec{F}_n + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Это векторное равенство удобно записать в проекциях на ось  $X$ , направив ее перпендикулярно нити:

$$mg \sin \alpha - N \sin \alpha = ma \cos \alpha.$$

Отсюда

$$N = m(g - a \operatorname{ctg} \alpha).$$

Шарик не отрывается от диска, если  $N > 0$ , т.е.

$$m(g - a \operatorname{ctg} \alpha) > 0.$$

Подставляем сюда выражение для  $a$  и находим, что

$$T \geq 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \cos \alpha}.$$

Заметим, что знак равенства в ответе относится к случаю, когда шарик находится на грани отрыва, т.е. может соприкасаться с

диск, а может и не соприкасаться с диском (что на практике не имеет значения). Ответ в виде строгого неравенства тоже можно считать правильным.

**Задача 2.** Небольшой шарик массой  $m$  подвешен на нити. Нить с шариком отклонили в горизонтальное положение и отпустили. Найдите натяжение нити в момент, когда она составляла угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом (рис. 3).

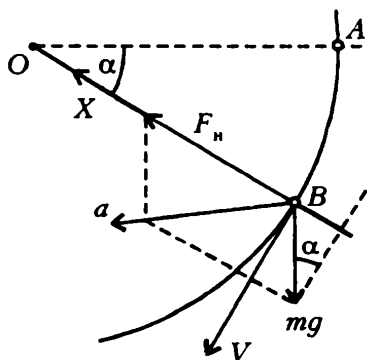


Рис. 3

Здесь мы имеем дело с неравномерным движением по окружности. В искомый момент на шарик действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила натяжения нити  $\vec{F}_n$  (см. рис.3). Эти две силы вызывают ускорение шарика  $\vec{a}$ , не направленное к центру вращения  $O$ . По второму закону Ньютона,

$$\vec{F}_n + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Обратите внимание, что вектор ускорения направлен так же, как и результирующая сил  $\vec{F}_n$  и  $m\vec{g}$ . Запишем векторное равенство в проекциях на ось  $X$ , направленную вдоль нити:

$$F_n - mg \sin \alpha = ma_n.$$

Мы воспользовались тем, что при неравномерном движении по окружности проекция ускорения на ось, направленную вдоль радиуса к центру вращения, равна модулю нормального ускорения.

Пусть длина нити  $R$ , а линейная скорость шарика в рассматриваемый момент  $V$ . Тогда

$$a_n = \frac{V^2}{R}.$$

По закону сохранения энергии полная энергия шарика в точках  $A$  и  $B$  одна и та же, т.е.

$$mgR \sin \alpha = \frac{mV^2}{2}.$$

Из последних трех уравнений находим силу натяжения нити:

$$F_n = 3mg \sin \alpha = \frac{3mg}{2}.$$

**Задача 3.** Диск может вращаться вокруг вертикальной оси, перпендикулярной его плоскости. На диске лежит небольшой брусок массой  $M$  на расстоянии  $R$  от оси (рис.4). На горизонтальной поверхности бруска находится шайба массой  $m$ , прикрепленная к оси нитью. Диск вместе с бруском и шайбой начинают раскручивать, очень медленно увеличивая его угловую скорость. Считая трение между бруском и диском пренебрежимо малым, опреде-

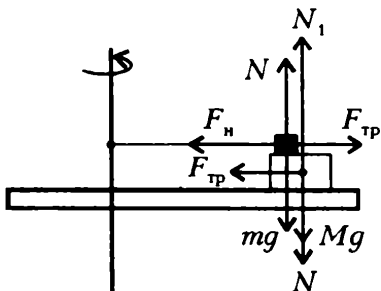


Рис. 4



лите, при какой угловой скорости брусок начнет выскальзывать из-под шайбы. Коэффициент трения скольжения между шайбой и бруском  $\mu$ .

Найдем сначала угловую скорость  $\omega$ , при которой брусок не выскальзывает из-под шайбы, т.е. брусок и шайба вращаются вместе. В этом случае они движутся по окружности радиусом  $R$  с центростремительным ускорением  $a = \omega^2 R$ .

В данной системе много тел и, соответственно, много сил. Прежде всего разберемся с направлением силы трения (покоя) между шайбой и бруском (голословное утверждение, что расположенная в горизонтальной плоскости сила трения параллельна нити и не может быть направлена под углом к ней, не очевидно). На шайбу действуют вертикально направленные сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила нормальной реакции  $\vec{N}$  со стороны бруска, а также сила натяжения нити  $\vec{F}_n$  и сила трения  $\vec{F}_{тр}$ , действующая со стороны бруска. Согласно второму закону Ньютона, векторная сумма этих сил должна быть направлена к оси вращения. Это будет только в том случае, если сила трения окажется направленной параллельно нити. По третьему закону Ньютона такая же по модулю и противоположно направленная сила действует и на брусок со стороны шайбы.

Теперь рассмотрим силы, действующие на брусок. Это сила тяжести  $M\vec{g}$ , силы  $\vec{N}$  и  $\vec{F}_{тр}$  со стороны шайбы и сила  $\vec{N}_1$  со стороны диска. Уравнение движения бруска, записанное в проекциях на ось, направленную вдоль нити, имеет вид

$$F_{тр} = M\omega^2 R.$$

Брусок не выскальзывает, если модуль силы трения покоя меньше своего максимального значения, равного модулю силы трения скольжения, т.е. если

$$F_{тр} < \mu mg,$$

или, с учетом полученного ранее выражения для  $F_{тр}$ ,

$$M\omega^2 R < \mu mg.$$

Отсюда следует, что брусок начнет выскальзывать, когда угловая скорость вращения диска достигнет величины

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu mg}{MR}}.$$

**Задача 4.** Космонавты, высадившиеся на поверхности Марса, измерили период вращения конического маятника (неболь-

шое тело, прикрепленное к нити и движущееся по окружности в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью; рис. 5), оказавшийся равным  $T = 3$  с. Длина нити  $L = 1$  м. Угол, образованный нитью с вертикалью, равен  $\alpha = 30^\circ$ . Найдите по этим данным ускорение свободного падения на Марсе.

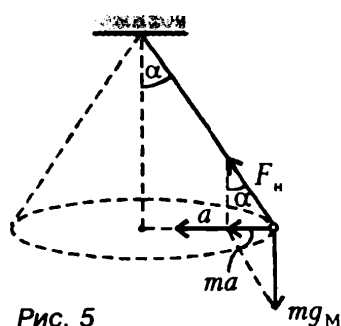


Рис. 5

Тело движется по окружности радиусом  $L \sin \alpha$  с угловой скоростью  $2\pi/T$  и с ускорением

$$a = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 L \sin \alpha.$$

На тело массой  $m$  действуют сила натяжения нити  $\vec{F}_n$  и сила тяготения,  $m\vec{g}_M$ , где  $\vec{g}_M$  – ускорение свободного падения на Марсе. Уравнение движения тела имеет вид

$$\vec{F}_n + m\vec{g}_M = m\vec{a}.$$

Из рисунка 5 видно, что

$$\frac{ma}{mg_M} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Подставив в последнее равенство выражение для  $a$ , находим ускорение свободного падения на Марсе:

$$g_M = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 L \cos \alpha \approx 3,8 \text{ м/с}^2.$$

**Задача 5.** Небольшая шайба соскальзывает без начальной скорости и без трения с верхней точки шара, закрепленного на горизонтальной поверхности стола. Под каким углом к поверхности стола шайба ударится о стол?

Пусть радиус шара  $R$  (рис. 6). Движение шайбы по поверхности шара до момента отрыва – это неравномерное движение по окружности радиусом  $R$ . Найдём сначала угол  $\alpha$  и скорость шайбы  $V$  в момент отрыва от шара.

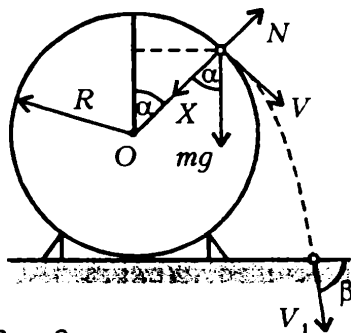


Рис. 6

На шайбу действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила нормальной реакции  $N$  со стороны шара. Запишем уравнение движения

шайбы в проекциях на ось  $X$ :

$$mg \cos \alpha - N = ma_n,$$

где  $a_n = V^2/R$  – нормальное ускорение. В момент отрыва  $N = 0$ , поэтому получаем

$$V^2 = gR \cos \alpha.$$

Для нахождения  $V$  и  $\alpha$  требуется еще одно уравнение. Запишем его, воспользовавшись законом сохранения энергии:

$$\frac{mV^2}{2} = mg(R - R \cos \alpha),$$

откуда

$$V^2 = 2gR(1 - \cos \alpha).$$

Решая систему двух уравнений с двумя неизвестными  $V$  и  $\alpha$ , находим

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}, \quad V = \sqrt{\frac{2gR}{3}}.$$

Теперь найдем скорость падения шайбы  $V_1$  на стол. Это проще всего сделать с помощью закона сохранения энергии, приравняв полные энергии шайбы в точке падения на стол и в верхней точке шара:

$$\frac{mV_1^2}{2} = 2mgR,$$

откуда

$$V_1 = 2\sqrt{gR}.$$

В промежутке времени между отрывом от шара и падением на стол горизонтальная составляющая скорости шайбы не менялась, следовательно (см. рис.6),

$$V \cos \alpha = V_1 \cos \beta.$$

С учетом найденных ранее выражений для  $V$ ,  $\cos \alpha$  и  $V_1$ , получим, что шайба упадет на стол под углом  $\beta$  к его поверхности, равным

$$\beta = \arccos \frac{\sqrt{6}}{9} \approx 74^\circ.$$

### Упражнения

1. К вершине прямого кругового конуса с помощью нити длиной  $l$  прикреплена небольшая шайба (рис.7). Вся система вращается вокруг оси конуса, расположенной вертикально. При каком числе оборотов в

единицу времени шайба не будет отрываться от поверхности конуса? Угол при вершине конуса  $2\alpha = 120^\circ$ .

2. Диск может вращаться вокруг вертикальной оси, перпендикулярной его плоскости. На диске лежит небольшой брусок массой  $M$  на расстоянии  $R$  от оси (см. рис.4). На горизонтальной поверхности бруска находится шайба массой  $m$ , прикрепленная к оси нитью. Диск вместе с бруском и шайбой начинают раскручивать, очень медленно увеличивая его угловую скорость. Коэффициент трения скольжения между бруском и диском  $\mu$ . Считая трение между шайбой и бруском пренебрежимо малым, определите, при какой угловой скорости брусок начнет выскальзывать из-под шайбы.

3. С верхней точки шара радиусом  $R = 54$  см, закрепленного на горизонтальной поверхности стола, соскальзывает без начальной скорости и без трения небольшой шарик. На какую максимальную высоту от стола поднимется шарик после упругого удара о стол?

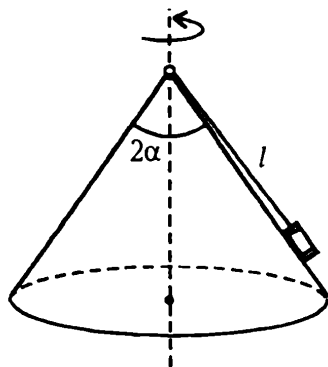


Рис. 7

При решении механических задач неоценимую помощь может оказать использование понятия центра масс системы материальных точек. Одни задачи просто невозможно решить, не прибегая к этому понятию, решение других с его помощью может стать гораздо проще и нагляднее. Перед тем как обсуждать конкретные задачи, напомним основные свойства центра масс и проиллюстрируем их примерами.

Центром масс (центром инерции) системы материальных точек назовем точку, характеризующую распределение масс в системе. Координаты центра масс определяются формулами

$$x_u = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_N x_N}{m_1 + \dots + m_N},$$

$$y_u = \frac{m_1 y_1 + \dots + m_N y_N}{m_1 + \dots + m_N},$$

$$z_u = \frac{m_1 z_1 + \dots + m_N z_N}{m_1 + \dots + m_N},$$

где  $m_i$  – массы материальных точек, образующих систему,  $x_i, y_i, z_i$  – координаты этих точек. Читатели, знакомые с понятием радиус-вектора, предпочтут векторную запись:

$$\vec{r}_u = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + \dots + m_N}. \quad (1)$$

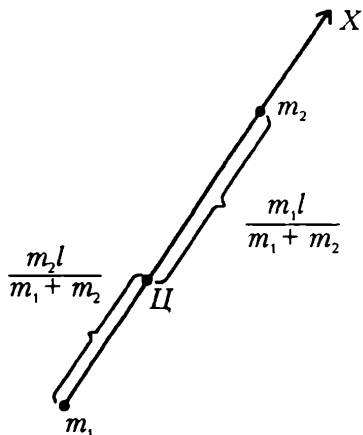


Рис. 1

**Пример 1.** Найдем положение центра масс простейшей системы, состоящей из двух точек, массы которых  $m_1$  и  $m_2$  и расстояние между ними  $l$  (рис. 1). Направив ось  $X$  от первой точки ко второй, получим, что расстояние от первой точки

до центра масс  $C$  (т.е. координата центра масс) равно  $m_2 l / (m_1 + m_2)$ , а расстояние от центра масс до второй точки равно  $m_1 l / (m_1 + m_2)$ , т.е. отношение расстояний обратно отношению масс. Значит, в этом случае положение центра масс совпадает с центром тяжести.

Обсудим некоторые свойства центра масс, что, как нам кажется, наполнит физическим содержанием приведенное выше несколько формальное определение этого понятия.

1) Положение центра масс не изменится, если какую-то часть системы заменить одной точкой с массой, равной массе этой подсистемы, и находящейся в ее центре масс.

**Пример 2.** Рассмотрим плоский однородный треугольник и найдем положение его центра масс. Разделим треугольник на тонкие полоски, параллельные одной из сторон, и заменим каждую полоску точкой, расположенной в ее середине. Так как все такие точки лежат на медиане треугольника, центр масс тоже должен лежать на медиане. Повторяя рассуждения для каждой из сторон, получаем, что центр масс находится на пересечении медиан.

2) Скорость центра масс можно найти, взяв производную по времени от обеих частей равенства (1):

$$\vec{v}_c = \frac{m_1 \vec{v}_1 + \dots + m_N \vec{v}_N}{m_1 + \dots + m_N} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad (2)$$

где  $\vec{p}$  – импульс системы, а  $m$  – полная масса системы. Видно, что скорость центра масс замкнутой системы постоянна. Значит, если связать с центром масс поступательно движущуюся систему отсчета, то она будет инерциальной.

**Пример 3.** Поставим однородный стержень длиной  $l$  вертикально на гладкую плоскость (рис. 2) и отпустим. В процессе падения как горизонтальная составляющая его импульса, так и горизонтальная составляющая скорости центра масс будут оставаться равными нулю. Поэтому в момент падения центр стержня окажется в том месте, где первоначально стоял стержень, а концы стержня сместятся по горизонтали на  $l/2$ .

3) Ускорение центра масс равно производной от его скорости по

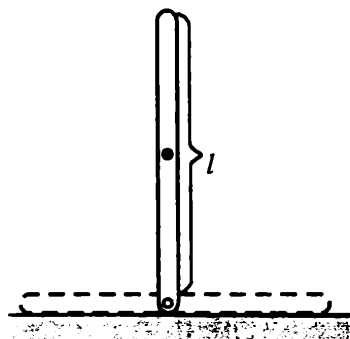


Рис. 2

времени:

$$\vec{a}_u = \frac{m_1 \vec{a}_1 + \dots + m_N \vec{a}_N}{m_1 + \dots + m_N} = \frac{\sum \vec{F}}{m}, \quad (3)$$

где в правой части равенства стоят только внешние силы, так как все внутренние силы сокращаются по третьему закону Ньютона. Получаем, что центр масс движется так, как двигалась бы воображаемая точка с массой, равной массе системы, под действием результирующей внешней силы. Наверное, это самое физическое свойство центра масс.

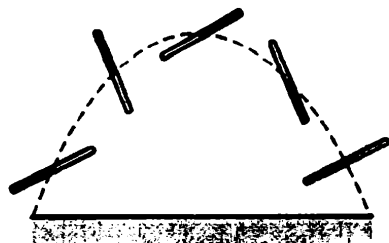


Рис. 3

**Пример 4.** Если бросить палку, приведя ее при этом во вращение, то центр масс палки (ее середина) будет двигаться с постоянным ускорением  $g$  по параболе (рис.3).

4) Пусть система точек находится в однородном поле тяжести. Тогда суммарный момент сил тяжести относительно любой оси, проходящей через центр масс, равен нулю. Это значит, что равнодействующая сил тяжести проходит через центр масс, т.е. центр масс является также центром тяжести.

5) Потенциальная энергия системы точек в однородном поле тяжести вычисляется по формуле

$$E = m_1 g h_1 + \dots + m_N g h_N = \\ = (m_1 + \dots + m_N) g \frac{m_1 h_1 + \dots + m_N h_N}{m_1 + \dots + m_N} = m g h_u,$$

где  $h_u$  – высота центра масс системы.

**Пример 5.** При выкапывании в однородном грунте ямы глубиной  $h$  и разбрасывании грунта по поверхности его потенциальная энергия возрастает на  $mg \frac{h}{2}$ , где  $m$  – масса извлеченного грунта.

6) И еще одно полезное свойство центра масс. Кинетическая энергия  $E_k$  системы точек может быть представлена в виде суммы двух слагаемых: кинетической энергии общего поступательного движения системы, равной  $mv_u^2/2$ , и кинетической энергии  $E_{k \text{ отн}}$  движения относительно системы отсчета, связанной с центром масс:

$$E_k = \frac{mv_u^2}{2} + E_{k \text{ отн}}.$$

**Пример 6.** Кинетическая энергия обруча, катящегося без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью  $v$ , равна  $mv^2/2 + mv^2/2 = mv^2$ , так как относительное движение в этом случае представляет собой чистое вращение, для которого линейная скорость точек обруча равна  $v$  (полная скорость нижней точки должна быть равна нулю).

Теперь приступим к разбору задач на использование центра масс.

**Задача 1.** Однородный стержень лежит на гладкой горизонтальной поверхности. К стержню прикладывают две одинаковые по величине, но противоположные по направлению горизонтальные силы: одна сила приложена к середине стержня, другая – к его концу (рис.4). Относительно какой точки начнет поворачиваться стержень?

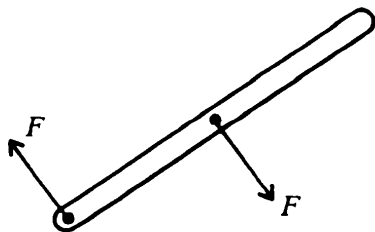


Рис. 4

На первый взгляд может показаться, что осью вращения будет точка, лежащая посередине между точками приложения сил. Однако уравнение (3) показывает, что поскольку сумма внешних сил равна нулю, то равно нулю и ускорение центра масс. Значит, центр стержня будет оставаться в покое, т.е. служить осью вращения.

**Задача 2.** Тонкий однородный стержень длиной  $l$  и массой  $m$  привели в движение вдоль гладкой горизонтальной поверхности так, что он движется поступательно и одновременно вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Найдите натяжение стержня в зависимости от расстояния  $x$  до его центра.

Перейдем в инерциальную систему отсчета, связанную с центром стержня. Рассмотрим движение куска стержня, заключенного между рассматриваемой точкой стержня (расположенной на расстоянии  $x$  от центра) и его ближайшим концом (рис.5). Единственной внешней силой для этого куска является искомая сила натяжения  $F_n$ , масса равна  $\Delta m = m(l/2 - x)/l$ , а его центр масс  $C$  движется по окружности радиусом  $x + (l/2 - x)/2 = (l + 2x)/4$  с ускорением  $a_c = \omega^2(l + 2x)/4$ . Записывая уравнение движения центра масс выделенного куска,

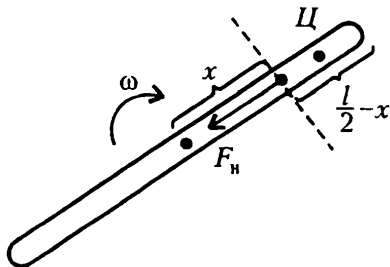


Рис. 5



получим

$$F_n = \Delta m a_{\text{ц}} = \frac{m\omega^2(l^2 - 4x^2)}{8l}.$$

**Задача 3.** Двойная звезда состоит из двух звезд-компонентов массами  $m_1$  и  $m_2$ , расстояние между которыми не меняется и остается равным  $L$ . Найдите период вращения двойной звезды.

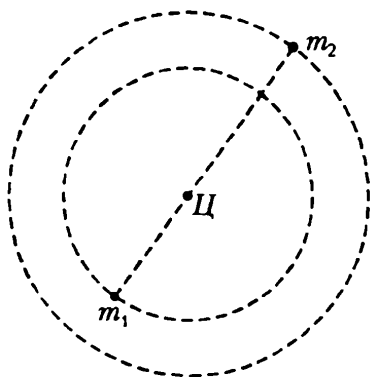


Рис. 6

Рассмотрим движение звезд-компонентов в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс двойной звезды. В этой системе отсчета звезды движутся с одной и той же угловой скоростью по окружностям разных радиусов (рис.6). Радиус вращения звезды массой  $m_1$  равен  $m_2 L / (m_1 + m_2)$  (см. Пример 1), а ее центростремительное ускорение создается силой притяжения к другой звезде:

$$G \frac{m_1 m_2}{L^2} = m_1 \omega^2 \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}.$$

Видим, что период вращения двойной звезды равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L^3}{G(m_1 + m_2)}}$$

и определяется полной массой двойной звезды независимо от того, как она распределена между звездами-компонентами.

**Задача 4.** Две точечные массы  $m$  и  $2m$  связаны невесомой нитью длиной  $l$  и движутся по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорость массы  $2m$  равна нулю, а скорость массы  $m$  равна  $v$  и направлена перпендикулярно нити (рис.7). Найдите натяжение нити и период вращения системы.

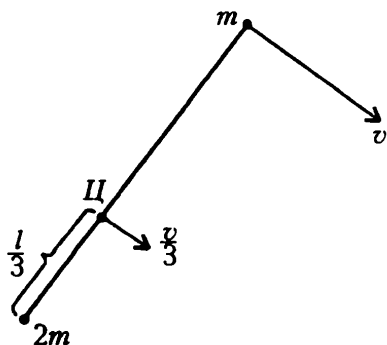


Рис. 7

Центр масс системы находится на расстоянии  $l/3$  от массы  $2m$

и движется со скоростью  $v/3$ . В системе отсчета, связанной с центром масс, точка массой  $2m$  движется по окружности радиусом  $l/3$  со скоростью  $v/3$ . Значит, период вращения равен

$$T = \frac{2\pi l}{v}$$

(проверьте, что такой же ответ получается, если рассмотреть точку массой  $m$ ). Натяжение нити найдем из уравнения движения любой из двух точек:

$$F_n = 2m \frac{(v/3)^2}{l/3} = \frac{2}{3} \frac{mv^2}{l}.$$

**Задача 5.** На гладкой горизонтальной плоскости лежат два одинаковых бруска массой  $m$  каждый, связанных легкой пружиной жесткостью  $k$  (рис.8). Первому бруску сообщают скорость  $v_0$  в направлении от второго бруска. Опишите движение системы. Через какое время деформация пружины впервые достигнет максимального значения?

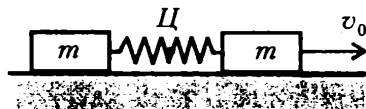


Рис. 8

Центр масс системы будет перемещаться с постоянной скоростью  $v_0/2$ . В системе отсчета центра масс начальная скорость каждого бруска равна  $v_0/2$ , а жесткость половинной пружины, которая соединяет бруски с неподвижным центром масс, составляет  $2k$  (жесткость пружины обратно пропорциональна ее длине). Период таких колебаний равен  $T = 2\pi\sqrt{m/(2k)}$ , а амплитуда колебаний каждого бруска, которую можно найти из закона сохранения энергии, составляет  $x_m = v_0\sqrt{m/(8k)}$ . В первый раз деформация станет максимальной через четверть периода, т.е. через время

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{m}{8k}}.$$

**Задача 6.** Шар массой  $m$  налетает со скоростью  $v$  на покоящийся шар массой  $2m$ . Найдите скорости обоих шаров после упругого центрального удара.

В системе отсчета, связанной с центром масс, полный импульс двух шаров равен нулю как до, так и после соударения. Легко догадаться, какой ответ для конечных скоростей удовлетворяет одновременно и этому условию, и закону сохранения энергии: скорости останутся такими же, как до удара, по величине, но

изменяют свои направления на противоположные. Теперь – подробнее.

Скорость центра масс системы равна  $v/3$ . В системе центра масс первый шар движется со скоростью  $2v/3$ , а второй шар движется навстречу первому со скоростью  $v/3$ . После удара шары будут разлетаться с такими же скоростями. Осталось вернуться в первоначальную систему отсчета. Применяя закон сложения скоростей, находим, что конечная скорость шара массой  $m$  равна  $v/3$  и направлена назад, а скорость покоившегося раньше шара массой  $2m$  равна  $2v/3$  и направлена вперед.

Отметим, что в системе центра масс является очевидным утверждение, что при ударе относительная скорость шаров не меняется по величине, но меняется по направлению. А так как разность скоростей при переходе в другую инерциальную систему отсчета не изменяется, можно считать, что мы вывели это важное соотношение и для первоначальной системы отсчета:

$$v_1 - v_2 = u_2 - u_1,$$

где буква  $v$  используется для обозначения начальных скоростей, а  $u$  – для конечных. Это уравнение можно решать совместно с законом сохранения импульса вместо закона сохранения энергии (куда скорости входят во второй степени).

**Задача 7.** Известно, что при упругом нецентральной ударе двух одинаковых шаров, один из которых до удара покоился, угол разлета равен  $90^\circ$ . Докажите это утверждение.

В системе центра масс нецентральный удар можно описать следующим образом. До удара шары сближаются с одинаковыми импульсами, после удара они разлетаются с такими же по величине, но противоположно направленными импульсами, а прямая разлета поворачивается на некоторый угол относительно прямой сближения. Чтобы перейти обратно в начальную систему

отсчета, надо каждую конечную скорость сложить (векторно!) со скоростью центра масс.

В случае одинаковых шаров скорость центра масс равна  $v/2$ , где  $v$  – скорость налетающего шара, и в системе центра масс шары сближаются и разлетаются с одинаковыми скоростями  $v/2$ . В том, что после сложения каждой конечной скорости со скоростью центра масс получа-

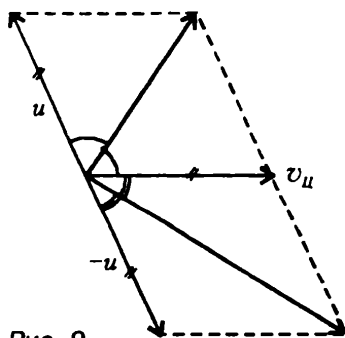


Рис. 9

ются взаимно перпендикулярные векторы, можно убедиться из рисунка 9. А можно и просто проверить, что скалярное произведение векторов  $\left(\vec{u} + \vec{v}_u\right)$  и  $\left(-\vec{u} + \vec{v}_u\right)$  обращается в ноль в силу того, что модули векторов  $\vec{u}$  и  $\vec{v}_u$  равны друг другу.

### Упражнения

1. Стержень массой  $m$  и длиной  $l$  шарнирно закреплен за один из концов. Стержень отклонили на некоторый угол от вертикального положения и отпустили. В момент прохождения вертикального положения скорость нижней точки равна  $v$ . Найдите натяжение в средней точке стержня в этот момент времени.

2. Стержень массой  $m$  и длиной  $l$  вращают в горизонтальной плоскости с угловой скоростью  $\omega$  вокруг одного из его концов. Найдите зависимость натяжения стержня от расстояния  $x$  до оси вращения, если на другом конце закреплен маленький грузик массой  $M$ .

3. Найдите период колебаний для системы, описанной в задаче 5 статьи, но для брусков различных масс  $m_1$  и  $m_2$ .

4. Выведите известные общие формулы для упругого центрального удара двух шаров, используя переход в систему отсчета центра масс.

5. Шар массой  $m_1$  налетает на покоящийся шар меньшей массы  $m_2$ . Найдите максимально возможный угол отклонения налетающего шара при упругом нецентральной ударе.

Две основные модели механики — это материальная точка и твердое тело. В отличие от точек, твердые тела могут двигаться не только поступательно, но и вращательно. Поскольку динамику вращательного движения твердого тела в школе не изучают, большинство задач динамики посвящено движению точки. И тем не менее, некоторые школьные задачи (как олимпиадные, так и вступительные) имеют дело с протяженными телами, массу которых нельзя считать сосредоточенной в одной точке.

В этой статье будут рассмотрены разнообразные *линейные* объекты — веревки (массивные нити), цепочки, струи, масса которых распределена вдоль одной линии. Подход к обсуждению движения таких тел, в сущности, обычный — в основе лежат уравнения динамики точки для небольшого элемента протяженного тела. При этом в некоторых случаях достаточно записать уравнения динамики для одного-единственного элемента линейного объекта. Главное — правильно этот элемент выбрать. В других случаях возникает необходимость просуммировать уравнения движения, записанные для отдельных элементов, по всей длине. При удачной записи уравнений (при проектировании на удачно выбранные оси) суммирование может оказаться совсем несложным.

Теперь — конкретные задачи.

**Задача 1.** *Струя воды сечением  $S$  ударяется о стенку, расположенную перпендикулярно струе. Скорость воды в струе  $v$ , после удара вода теряет скорость и стекает по стенке. Какова сила давления воды на стенку? Плотность воды  $\rho$ .*

Изменение импульса воды за время соударения со стенкой  $\Delta t$  равно импульсу силы реакции, действующей на воду со стороны стенки, а по третьему закону Ньютона эта сила равна по величине искомой силе давления струи на стенку.

Изменение импульса воды сводится к изменению импульса элемента струи длиной  $\Delta l = v\Delta t$ , который за время  $\Delta t$  пришел

в соприкосновение со стенкой (рис. 1):

$$0 - \Delta m v = -F \Delta t.$$

Подставляя  $\Delta m = \rho(v \Delta t)S$  и сокращая на  $\Delta t$ , получаем

$$F = \rho S v^2.$$

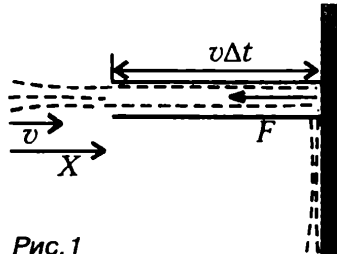


Рис. 1

Характерно, что интервал времени  $\Delta t$  и длина элемента струи  $\Delta l$  выбираются произвольно, но в ответ они, конечно же, не входят.

**Задача 2.** Космический корабль массой  $M$  движется в глубоком космосе. Для управления кораблем используется реактивный двигатель, который выбрасывает реактивную струю со скоростью  $\vec{u}$  относительно корабля, причем расход топлива в струе равен  $\mu$  (расход топлива — это масса топлива, выбрасываемая за единицу времени). Найдите ускорение корабля.

Изменение импульса замкнутой системы корабль — топливо за время  $\Delta t$  равно нулю. Запишем закон сохранения импульса в системе отсчета, в которой скорость корабля в начале этого интервала времени равна нулю:

$$0 = M \Delta \vec{v} + \mu \Delta t \vec{u},$$

где  $\Delta \vec{v}$  — изменение скорости корабля. Перепишем это уравнение в виде

$$M \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = -\mu \vec{u}.$$

Стоящее в правой части выражение называется *реактивной силой*. Если на корабль действует еще и внешняя сила  $\vec{F}$  (например, со стороны поля тяготения), то ускорение корабля

$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$  вычисляется по формуле

$$M \vec{a} = -\mu \vec{u} + \vec{F}.$$

Это уравнение называется *уравнением Мещерского*. При его решении, вообще говоря, надо учитывать, что масса корабля  $M$  уменьшается со временем.

**Задача 3.** Тонкая цепочка длиной  $l$  и массой  $m$  удерживается за верхний конец так, что нижним концом она касается земли. Цепочку отпускают, и она начинает падать. Найдите силу давления цепочки на землю через время  $t$ . Цепочка неупругая и мягкая.

Поскольку цепочка мягкая, сила взаимодействия нижних звеньев с поверхностью не передается верхним, которые свободно падают с ускорением  $g$ . К моменту времени  $t$  часть цепочки длиной  $gt^2/2$  и массой  $(m/l)gt^2/2$  лежит на земле, а верхняя часть цепочки падает со скоростью  $v = gt$ . Сила реакции земли, равная по величине силе давления цепочки, складывается из двух частей. Одна уравнивает силу тяжести неподвижной части цепочки и равна

$$F_1 = \frac{mg^2 t^2}{2l}.$$

Вторая связана с изменением импульса элемента цепочки длиной  $v\Delta t$  и массой  $\Delta m = (m/l)v\Delta t$  при его соприкосновении с поверхностью и находится из уравнения  $F_2\Delta t = \Delta mv$ , откуда

$$F_2 = \frac{mv^2}{l} = \frac{mg^2 t^2}{l}.$$

Видно, что  $F_2 = 2F_1$ , а полная сила давления

$$F = \frac{3mg^2 t^2}{2l}$$

в три раза больше веса неподвижной части цепочки. Перед самым концом падения эта сила достигает максимального значения  $3mg$ .

**Задача 4.** Длинная тонкая цепочка перекинута через блок так, что ее правая часть свисает до пола, а левая лежит, свернувшись клубком, на уступе высотой  $H$  (рис.2). Цепочку отпускают, и она приходит в движение. Найдите установившуюся скорость движения цепочки. Блок идеальный, цепочка неупругая.

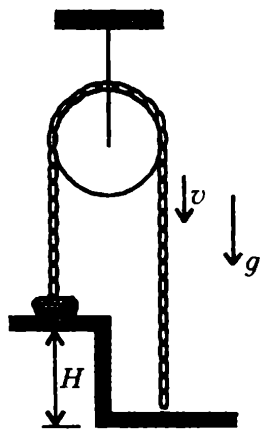


Рис. 2

Рассмотрим сначала правую часть цепочки. Поскольку цепочка неупругая и мягкая, взаимодействие с полом нижнего звена не передается верхним. Значит, натяжение цепочки возле пола равно нулю. Так как цепочка при установившемся режиме движется равномерно, натяжение на некоторой высоте  $h$  равно весу нижней части цепочки:

$$T_h = \lambda gh,$$

где  $\lambda$  — масса единицы длины цепочки. Перейдем теперь к левой части цепочки. Натяжение в нижней части, над самым уступом,

можно найти, записав изменение импульса элемента цепочки длиной  $v\Delta t$  и массой  $\lambda v\Delta t$ , который за время  $\Delta t$  приходит в движение:

$$T_H \Delta t = \lambda v \Delta t v, \text{ или } T_H = \lambda v^2.$$

При равномерном движении натяжения справа и слева на одном уровне должны быть равны:

$$T_h = T_H,$$

откуда получаем

$$\lambda g H = \lambda v^2, \text{ или } v = \sqrt{gH}.$$

Попробуем решить эту задачу из энергетических соображений. Если быть не очень внимательным, можно легко прийти к противоречию с полученным выше результатом. Казалось бы, при установившемся движении цепочки работа силы тяжести за время  $\Delta t$  должна быть равна выделившемуся за то же время количеству теплоты. Работа равна  $\lambda g H v \Delta t$ , а количество теплоты, выделяющееся при неупругом ударе о пол элемента длиной  $v\Delta t$ , равно  $\lambda v \Delta t v^2 / 2$ . Однако, если приравнять эти выражения, получим ответ, в  $\sqrt{2}$  раз больший предыдущего. В чем же здесь дело?

Оказывается, тепло выделяется не только при неупругом ударе элемента цепочки о пол, но и (хотя это не столь очевидно) при разгоне такого же элемента на уступе до скорости  $v$ . Более того, эти количества теплоты оказываются одинаковыми. Это приводит к тому, что общее количество теплоты увеличивается вдвое и лишний  $\sqrt{2}$  из ответа исчезает. Действительно, сравним работу силы натяжения при подъеме элемента длиной  $v\Delta t$  с уступа:  $\lambda v^2 (v\Delta t)$  с кинетической энергией, приобретенной этим элементом:  $(\lambda v \Delta t) v^2 / 2$ . Видно, что работа в два раза больше, а разность между работой и энергией как раз равна количеству теплоты, которое выделилось при разгоне этого элемента.

Чтобы лучше понять механизм выделения тепла, представим себе, что мы хотим разогнать тело массой  $m$  до скорости  $v$  при помощи пружины, для чего начнем перемещать конец пружины с постоянной скоростью  $v$ . Если пружина идеальная, то скорость тела никогда не установится, так как колебательный процесс никогда не прекратится. Если же пружина не идеальная, то колебания в конце концов затухнут и тело приобретет скорость  $v$ . Чтобы узнать, сколько за это время выделилось тепла, надо перейти в систему отсчета, в которой конец пружины покоится.



В этой системе начальная кинетическая энергия тела  $mv^2/2$  полностью перейдет в тепло. Значит, приобретенная телом кинетическая энергия при разгоне равна количеству теплоты, которое при этом выделяется.

**Задача 5.** Тонкое веревочное кольцо массой  $m$  и радиусом  $R$  положили на гладкую горизонтальную поверхность и раскрутили до угловой скорости  $\omega$ . Найдите силу натяжения веревки.

Запишем второй закон Ньютона для элемента веревки длиной  $\Delta l$  и массой  $\Delta m = m\Delta l/(2\pi R)$ , который виден из центра окружности под малым углом  $\Delta\phi = \Delta l/R$  (рис.3). Действующая на элемент сила равна векторной сумме двух сил натяжения:  $\Delta F = T\Delta\phi$ . Из второго закона Ньютона  $\Delta F = \Delta m\omega^2 R$  находим

$$T = \frac{m\omega^2 R}{2\pi}.$$

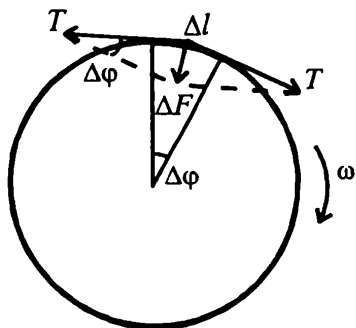


Рис. 3

Полученный результат имеет неожиданное применение — с его помощью можно найти положение центра масс (центра тяжести) тонкой

однородной полуокружности. Действительно, сила, действующая на вращающуюся полуокружность, равна  $2T$ , а в уравнение движения входит ускорение центра масс:  $2T = (m/2)\omega^2 x$ , где  $x$  — расстояние от центра окружности до центра масс полуокружности. Подставляя  $T$ , получаем  $x = 2R/\pi$ .

**Задача 6.** Веревку длиной  $l$  и массой  $m$  кладут на гладкое горизонтальное бревно радиусом  $R$  (рис.4), причем вначале веревку удерживают за верхний конец, прикладывая горизонтальную силу  $F$ , а затем отпускают. Определите: а) значение силы  $F$ ; б) ускорение веревки в первый момент.

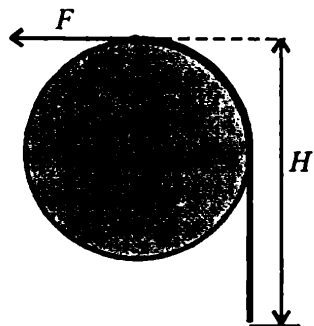


Рис. 4

Обозначим через  $H$  расстояние по вертикали (разность высот) между верхней и нижней точками веревки. Если веревка свешивается с бревна ( $l > \pi R/2$ ), то  $H = l - \pi R/2 + R$ ; если же нет, то  $H = R \cos(l/R)$ . Как мы увидим, в ответ будет входить только  $H$ .

Запишем второй закон Ньютона для элемента веревки длиной  $\Delta l$  и массой

$\Delta m = (m/l)\Delta l = \lambda \Delta l$  ( $\lambda$  — масса единицы длины веревки) в проекциях на ось, направленную вдоль этого элемента (рис.5):

$$\Delta T + \Delta m g \cos \alpha = \Delta m a.$$

Здесь  $\Delta T$  — разность между натяжениями на концах элемента,  $a$  — ускорение веревки (в первом случае, пока веревку удерживают, надо положить  $a = 0$ ). Перед тем как просуммировать эти уравнения, заметим, что  $\Delta m \cos \alpha = \lambda \Delta l \cos \alpha = \lambda \Delta h$ , где  $\Delta h$  — расстояние по вертикали между концами элемента.

Теперь просуммируем уравнения вдоль всей длины веревки. Сумма всех  $\Delta T$  равна разности сил натяжения на концах веревки, т.е. для неподвижной веревки это  $-F$ , а для свободной веревки это ноль. В случае а) получаем уравнение

$$-F + \lambda g H = 0, \text{ откуда } F = (m/l)gH.$$

В случае б) —

$$\lambda g H = m a, \text{ откуда } a = g(H/l).$$

Эту задачу можно решить и из энергетических соображений, причем в этом случае удастся обойтись без суммирования. Начнем с неподвижной веревки. Сместив конец веревки на малое расстояние  $\Delta x$ , мы совершим работу  $F\Delta x$ , которая должна равняться изменению потенциальной энергии веревки  $\Delta E_p$ . Заметим, что для расчета потенциальной энергии можно считать, что вся веревка осталась на месте, а элемент длиной  $\Delta x$  был перенесен с одного конца веревки на другой. Значит,  $\Delta E_p = \lambda \Delta x g H$ . Приравнявая изменение энергии к работе, получаем  $F = (m/l)gH$ . Для свободной веревки надо  $\Delta E_p$  приравнять к кинетической энергии, а для определения ускорения использовать кинематическое выражение  $v^2 = 2ax$ . Сделайте это сами и, кроме того, подумайте, почему получается  $a = F/m$ . Если поймете, то вторая часть задачи станет просто продолжением первой.

**Задача 7.** Цепочку массой  $m$  и длиной  $l$  подвесили за концы к потолку (рис.6). При этом оказалось, что в местах закрепления цепочка образует углы  $\alpha$  с вертикалью. Найдите расстояние  $h$  от нижней точки цепочки до потолка.

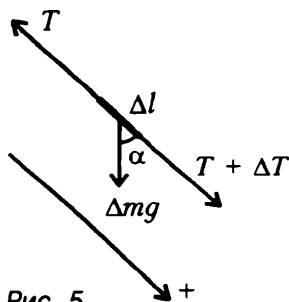


Рис. 5

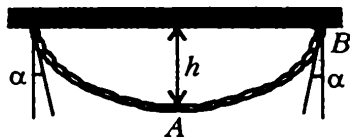


Рис. 6

Используя метод суммирования, описанный в предыдущей задаче, найдем соотношение между натяжениями в нижней точке  $A$  и в верхней точке  $B$ :

$$T_B - T_A = (m/l)gh.$$

Кроме того, запишем условия равновесия половины цепочки в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$T_B \sin \alpha = T_A, \quad T_B \cos \alpha = \frac{mg}{2}.$$

Выразив отсюда  $T_A$  и  $T_B$ , подставим их в первое уравнение и получим

$$h = l \frac{1 - \sin \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

### Упражнения

1. По трубе сечением  $S$  движется вода со скоростью  $v$ . Найдите силу, с которой вода действует на трубу в том месте, где труба делает поворот на  $90^\circ$ . Плотность воды  $\rho$ .

2. Готовясь к прыжку, кобра поднимает голову со скоростью  $v$ . Найдите силу давления кобры на землю. Массу кобры  $m$  считать равномерно распределенной вдоль туловища длиной  $l$ .

3. Через застопоренный блок (который не может вращаться) перекинули веревку длиной  $l$  и массой  $m$  так, что один ее конец находится на  $\Delta h$  выше другого. Считая поверхность блока идеально гладкой, найдите, с каким ускорением начнет соскальзывать веревка.

4. Веревку длиной  $l$  закрепили за концы на разных уровнях. Оказалось, что у одного конца веревка образует с вертикалью угол  $\alpha$ , а у другого — угол  $\beta$ . На сколько первый конец веревки выше второго?

*В. Чивилёв*

В этой статье на конкретных примерах показан общий метод нахождения периода гармонических колебаний различной физической природы.

Пусть некоторая физическая величина  $s$  совершает гармонические колебания, происходящие по закону

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

где  $A$  – амплитуда,  $\omega$  – циклическая частота и  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний. Легко показать, что вторая производная от  $s$  по времени  $t$  равна

$$s'' = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

С учетом уравнения (1) получаем

$$s'' + \omega^2 s = 0. \quad (2)$$

Итак, можно сделать вывод: если величина  $s$  изменяется по гармоническому закону (1), то отсюда следует справедливость равенства (2). В математике показывается и обратное: если для величины  $s = s(t)$  справедливо равенство (2) при всех допустимых значениях  $t$ , то  $s(t)$  имеет вид (1) и никакой другой. Причем  $A$  и  $\varphi_0$  есть произвольные постоянные, конкретные значения которых зависят от так называемых начальных условий, т.е. от значений  $s$  и ее первой производной  $s'$  в некоторый момент времени  $t$  (обычно при  $t = 0$ ).

Равенства, связывающие функцию, ее аргумент и производные функции по этому аргументу, называются в математике дифференциальными уравнениями. Поэтому равенство (2) называют дифференциальным уравнением гармонических колебаний. (Заметим, что в уравнении (2) стоит величина  $\omega^2$ , которая всегда положительна. Поэтому, например, уравнение  $s'' - 4s = 0$  не будет дифференциальным уравнением гармонических колебаний, так как не найдется такого действительного значения  $\omega$ , для которого  $\omega^2$  было бы равно  $-4$ .)

Таким образом, мы получили чрезвычайно важное как для теории, так и для решения задач утверждение:

Если с помощью законов физики для физической величины  $s$  удалось записать дифференциальное уравнение вида  $s'' + \omega^2 s = 0$ , то это означает, что  $s$  изменяется по гармоническому закону  $s = A \cos(\omega t + \varphi_0)$  с циклической частотой  $\omega$ . Конкретные значения амплитуды  $A$  и начальной фазы  $\varphi_0$  зависят от начальных условий.

Это утверждение может служить правилом для нахождения периода гармонических колебаний любых конкретных колебательных систем.

**Задача 1.** На легкой пружине жесткостью  $k$  подвешен груз массой  $m$ . Покажите, что вертикальные колебания такого пружинного маятника гармонические, и найдите их период.

Направим ось  $X$  вниз (рис. 1), начало координат поместим в точку, соответствующую равновесному положению груза, в котором пружина растянута по сравнению с ненапряженным состоянием на величину  $x_0$ , причем

$$kx_0 = mg.$$

В этом примере колеблющейся физической величиной является координата груза  $x = x(t)$ .

**Первый способ решения.** Используем второй закон Ньютона.

Запишем уравнение движения груза (уравнение второго закона Ньютона) в проекциях на ось  $X$ , учитывая, что проекция ускорения груза есть вторая

производная  $x''$  от координаты по времени, а проекция силы упругости  $\vec{F}$ , действующей на груз со стороны пружины, равна  $F_x = -k(x_0 + x)$ :

$$mx'' = F_x + mg,$$

или

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Видно, что это дифференциальное уравнение гармонических колебаний с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

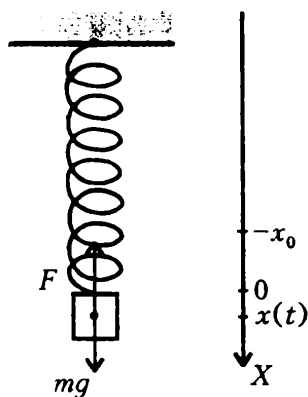


Рис. 1

и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

**Второй способ решения.** Используем закон сохранения энергии.

За нулевой уровень потенциальной энергии груза в поле тяжести удобно взять положение равновесия. Полная механическая энергия колебаний системы представляет собой сумму кинетической энергии груза  $m(x')^2/2$ , потенциальной энергии груза в поле тяжести  $mg(-x)$  и потенциальной энергии деформации пружины  $k(x_0 + x)^2/2$ . Здесь  $x'$  – проекция скорости груза на ось  $X$ , ее квадрат равен, естественно, квадрату модуля скорости. Полная механическая энергия при колебаниях должна сохраняться:

$$\frac{m(x')^2}{2} + \frac{k(x_0 + x)^2}{2} - mgx = \text{const}.$$

Дифференцируем это уравнение по времени:

$$mx'x'' + k(x_0 + x)x' - mgx' = 0.$$

После простых преобразований получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний такое же, как и при первом способе решения.

**Задача 2.** Покажите, что в однородном поле тяжести малые колебания математического маятника длиной  $l$  в вертикальной плоскости являются гармоническими, и найдите их период.

За колеблющуюся физическую величину удобно взять угол  $\alpha$  отклонения нити от вертикали (рис.2). Будем считать  $\alpha$  положительным, если маятник отклонен вправо от положения равновесия, и отрицательным, если он отклонен влево. Выразим кинетическую и потенциальную энергии шарика массой  $m$  в произвольный момент времени  $t$  через угол  $\alpha = \alpha(t)$  и производную угла по времени  $\alpha' = \alpha'(t)$ .

Угловая скорость шарика есть  $\alpha'$ , его линейная ско-

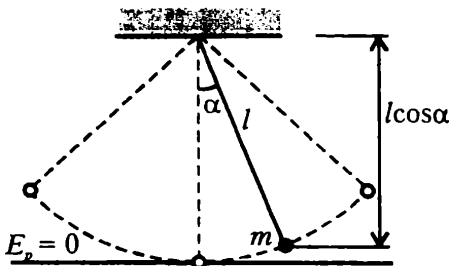


Рис. 2

рость равна  $v = \alpha' l$ , и кинетическая энергия составляет

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2(\alpha')^2}{2}.$$

Если за нулевой уровень потенциальной энергии ( $E_p = 0$ ) взять уровень, соответствующий положению шарика при равновесии маятника, то потенциальная энергия шарика в момент отклонения нити на угол  $\alpha$  окажется равной

$$E_p = mg(l - l \cos \alpha) = 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Для малых углов можно считать, что значения их синусов приблизительно равны самим углам (в радианах). Поэтому можно принять

$$E_p = \frac{mgl\alpha^2}{2}.$$

Полная энергия системы, равная  $E_k + E_p$ , при колебаниях сохраняется, следовательно,

$$\frac{ml^2(\alpha')^2}{2} + \frac{mgl\alpha^2}{2} = \text{const}.$$

Продифференцируем последнее равенство по времени:

$$\frac{ml^2 \cdot 2\alpha'\alpha''}{2} + \frac{mgl \cdot 2\alpha\alpha'}{2} = 0.$$

После упрощения имеем

$$\alpha'' + \frac{g}{l}\alpha = 0.$$

Мы получили дифференциальное уравнение гармонических колебаний величины  $\alpha$  с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Итак, малые колебания математического маятника являются гармоническими с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

**Задача 3.** На легком стержне длиной  $l$  висит небольшой шарик массой  $m$  (рис.3). К стержню прикреплена легкая пружина жесткостью  $k$  на расстоянии  $2l/3$  от точки подвеса. Другой конец пружины прикреплен к стене. Система может

вращаться без трения вокруг горизонтальной оси  $O$ . В положении равновесия стержень вертикален, пружина горизонтальна и не деформирована. Найдите период малых колебаний системы в плоскости рисунка.

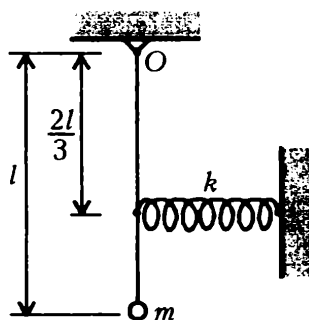


Рис. 3

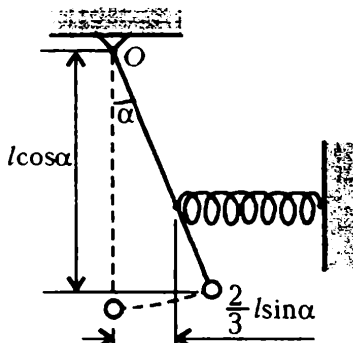


Рис. 4

Колеблющейся физической величиной будем считать угол  $\alpha$  отклонения стержня от вертикали (рис.4). Как и в предыдущей задаче, выразим кинетическую и потенциальную энергии системы в произвольный момент времени  $t$  через угол  $\alpha = \alpha(t)$  (будем считать его малым) и производную угла по времени  $\alpha' = \alpha'(t)$ .

Линейная скорость шарика равна  $\alpha'(t)l$ , его кинетическая энергия равна

$$E_k = \frac{ml^2(\alpha')^2}{2}.$$

За нулевой уровень потенциальной энергии шарика возьмем уровень, соответствующий положению равновесия шарика. Тогда потенциальная энергия шарика в поле тяжести будет равна

$$E_{p1} = mg(l - l \cos \alpha) = 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{mgl\alpha^2}{2}.$$

При отклонении маятника длина пружины сократится на  $x = (2l \sin \alpha)/3 = 2l\alpha/3$ , и ее потенциальная энергия станет равной

$$E_{p2} = \frac{kx^2}{2} = \frac{2kl^2\alpha^2}{9}.$$

Полная энергия системы, равная  $E_k + E_{p1} + E_{p2}$ , при колебаниях сохраняется:

$$\frac{ml^2(\alpha')^2}{2} + \frac{mgl\alpha^2}{2} + \frac{2kl^2\alpha^2}{9} = \text{const}.$$



Продифференцируем это равенство по времени:

$$ml^2\alpha'\alpha'' + mgl\alpha\alpha' + \frac{4kl^2\alpha\alpha'}{9} = 0,$$

или

$$\alpha'' + \left( \frac{g}{l} + \frac{4}{9} \frac{k}{m} \right) \alpha = 0.$$

Видим, что получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний, период которых равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{g}{l} + \frac{4}{9} \frac{k}{m}}}.$$

**Задача 4.** Вообразите, что вдоль диаметра Земли прорыт тоннель и в него сброшен камень. Через какое время камень окажется на противоположной стороне Земли? Сопротивление воздуха и вращение Земли не учитывать. Плотность Земли считать постоянной по всему объему, радиус Земли  $R = 6400$  км.

Направим ось  $X$  вдоль тоннеля и поместим начало координат в центр Земли (рис.5). Пусть в произвольный момент времени координата камня равна  $x$ .

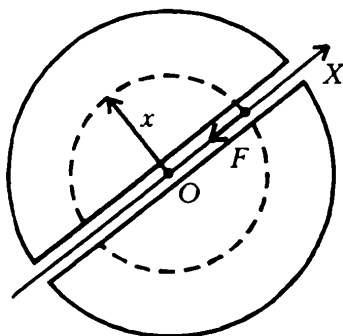


Рис. 5

Разобьем мысленно весь объем Земли на тонкие сферические слои с центром в точке  $O$ . Можно показать (сделайте это самостоятельно), что любой слой с радиусом больше  $x$  действовать на камень не будет, а слои с радиусами меньше  $x$  будут действовать с силой  $F$ , равной силе притяжения между шаром радиусом  $x$  и камнем. Если плотность Земли  $\rho$ , то масса такого шара равна

$\frac{4\pi x^3 \rho}{3}$ , и по закону всемирного тяготения,

$$F = \frac{4}{3} G \rho m x,$$

где  $m$  – масса камня,  $G$  – гравитационная постоянная.

Для любого тела массой  $m_0$  на поверхности Земли можно записать

$$m_0 g = G \frac{m_0 (4\pi \rho R^3 / 3)}{R^2},$$

откуда

$$g = \frac{4}{3} G \pi R.$$

Тогда

$$F = \frac{mg}{R} x.$$

Запишем уравнение движения камня в проекциях на ось  $X$ :

$$mx'' = -F.$$

Подставив сюда выражение для  $F$  и упростив, получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний для координаты  $x$  камня:

$$x'' + \frac{g}{R} x = 0.$$

Отсюда следует, что камень в тоннеле будет совершать гармонические колебания с периодом

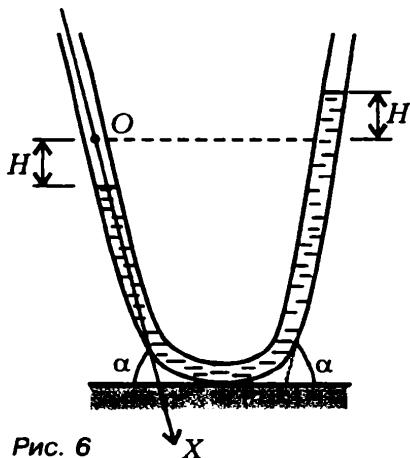
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

и достигнет противоположной стороны Земли через время

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 42 \text{ мин.}$$

**Задача 5.** Тонкая изогнутая трубка постоянного сечения расположена в вертикальной плоскости (рис.6). Каждое колено трубки наклонено к горизонту под углом  $\alpha$ . Длина части трубки, занятой жидкостью, равна  $l$ . Найдите период колебаний жидкости в трубке. При колебаниях опускающаяся поверхность жидкости не достигает изогнутого участка трубки. Трение между слоями жидкости и жидкости о трубку не учитывать.

За колеблющуюся физическую величину возьмем координату  $x$  поверхности жидкости в левом колене, направив ось  $X$  вдоль колена и поместив начало координат в равновесное положение поверхности жидкости в этом колене (см. рис.6). Пусть масса единицы длины жидкости



в трубке  $\rho$ . Тогда масса всей жидкости  $\rho l$ . При колебаниях скорость жидкости равна производной  $x'$  от координаты  $x$  по времени. Кинетическая энергия всей жидкости равна

$$E_k = \frac{\rho l (x')^2}{2}.$$

Теперь выразим потенциальную энергию жидкости через координату  $x$ . Если в левом колене уровень жидкости сместился вдоль трубки на  $x$  вниз, то по вертикали он опустился на  $H = x \sin \alpha$  в левом колене и поднялся на  $H$  в правом. Это эквивалентно тому, что жидкость массой  $\rho x$  была перенесена из левого колена в правое, поднявшись на высоту  $H$ . Потенциальную энергию жидкости в положении равновесия примем за ноль. Тогда

$$E_p = \rho x g H = \rho g x^2 \sin \alpha.$$

Полная энергия жидкости  $E_k + E_p$  при колебаниях сохраняется:

$$\frac{\rho l (x')^2}{2} + \rho g x^2 \sin \alpha = \text{const}.$$

Дифференцируем уравнение по времени:

$$\rho l x' x'' + 2 \rho g x x' \sin \alpha = 0.$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний для величины  $x$ :

$$x'' + \frac{2g \sin \alpha}{l} x = 0.$$

Итак, колебания жидкости в трубке гармонические с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g \sin \alpha}}.$$

### Упражнения

1. Решите задачу 2 статьи, используя второй закон Ньютона.

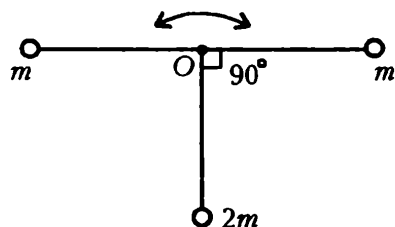


Рис. 7

2. Найдите период малых свободных колебаний в вертикальной плоскости жесткой конструкции (рис.7) из трех легких спиц, длиной  $l$  каждая, и трех небольших по размерам шариков с массами  $m$ ,  $m$  и  $2m$ . Конструкция может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси  $O$ , перпендикулярной плоскости конструкции.

# ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

А.Овчинников, В.Плис

Целый ряд задач механики можно решить, опираясь на важное следствие второго закона Ньютона — теорему об изменении кинетической энергии. Эта теорема утверждает, что изменение (приращение) кинетической энергии материальной точки равно работе всех сил, приложенных к этой точке:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

Здесь  $m$  — масса материальной точки,  $v$  и  $v_0$  — величины ее конечной и начальной скоростей,  $A$  — работа всех сил.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

**Задача 1.** *Чтобы затащить на горку санки массой  $m = 5$  кг, прикладывая постоянную силу вдоль наклонной плоской поверхности горки, необходимо совершить работу не менее  $A = 480$  Дж. С какой скоростью достигнет основания горки девочка на этих санках, если она съедет с горки с нулевой начальной скоростью по кратчайшему пути? Угол наклона плоскости горки к горизонту  $\alpha = \arctg 0,2$ . Коэффициент трения скольжения между санками и горкой  $\mu = 0,1$ .*

На санки, движущиеся по горке вверх, действуют четыре силы: сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила нормальной реакции  $\vec{N}_1$ , сила трения  $\vec{F}_{\text{тр1}}$  и сила тяги  $\vec{F}$ . В соответствии со вторым законом Ньютона, записанным в проекциях на перпендикуляр к наклонной плоскости горки, находим  $N_1 = mg \cos \alpha$ . Тогда для величины силы трения скольжения имеем

$$F_{\text{тр1}} = \mu N_1 = \mu mg \cos \alpha.$$

По теореме об изменении кинетической энергии для санок, очень медленно движущихся вверх, получим

$$0 - 0 = A + A_{\text{тяж1}} + A_{\text{тр1}}.$$

В левой части равенства стоит разность кинетических энергий

санок в конце и в начале движения, а в правой части записаны следующие величины:  $A$  — работа силы тяги,  $A_{\text{тяж1}} = mgl \cos(\pi/2 + \alpha) = -mgl \sin \alpha = -mgH$  — работа силы тяжести (здесь  $l$  — длина горки,  $H$  — ее высота),  $A_{\text{тр1}} = (\mu mg \cos \alpha) l \cos \pi = -\mu mgs$  — работа силы трения (здесь  $s$  — длина основания горки). Работа силы реакции, перпендикулярной перемещению, равна нулю. Таким образом, описание подъема санок приводит к равенству

$$\frac{A}{m} = g(H + \mu s).$$

На спускающиеся с горки санки с девочкой действуют три силы: сила тяжести  $M\vec{g}$  ( $M$  — сумма масс девочки и санок), сила нормальной реакции величиной  $Mg \cos \alpha$  и сила трения, равная  $\mu Mg \cos \alpha$ . По теореме об изменении кинетической энергии теперь имеем

$$\frac{Mv^2}{2} - 0 = A_{\text{тяж2}} + A_{\text{тр2}},$$

где в левой части равенства стоит разность кинетических энергий девочки с санками у основания горки и на старте (в верхней части горки), в правой части — сумма работ всех сил:  $A_{\text{тяж2}} = Mgl \cos(\pi/2 - \alpha) = Mgl \sin \alpha = MgH$ ,  $A_{\text{тр2}} = (\mu Mg \cos \alpha) l \cos \pi = -\mu Mgl \cos \alpha = -\mu Mgs$ , а работа силы реакции, как и на этапе подъема, равна нулю. После простых преобразований находим

$$\frac{v^2}{2} = g(H - \mu s).$$

Наконец, деление этой формулы на полученную ранее аналогичную формулу приводит окончательно к ответу на вопрос задачи:

$$v = \sqrt{\frac{2A \operatorname{tg} \alpha - \mu}{m \operatorname{tg} \alpha + \mu}} = 8 \text{ м/с}.$$

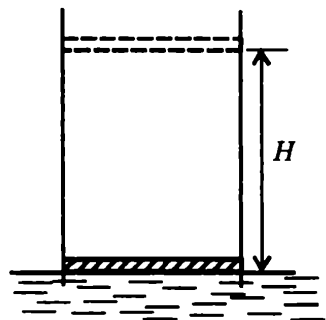


Рис. 1

**Задача 2.** В водоеме укреплен вертикальная труба с гладкой внутренней поверхностью, вдоль которой герметично может скользить легкий поршень. Нижний конец трубы погружен в воду (рис. 1). Поршень, лежащий вначале на поверхности воды, медленно поднимают на высоту  $H$  =

$= 15$  м. Найдите работу, которую необходимо при этом совершить. Площадь поршня  $S = 1$  дм<sup>2</sup>, атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па, плотность воды  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Давлением насыщенных паров воды пренебречь.

Если поднять поршень на небольшую высоту  $h$ , приложив к нему направленную вертикально вверх силу величиной  $F$ , давление поршня на воду уменьшится. Таким образом, в одной и той же горизонтальной плоскости давление в воде под поршнем будет меньше, чем под открытой поверхностью в водоеме. Под действием этой разности давлений вода втягивается в трубу и поднимается на высоту  $h$ , в результате чего давление у основания водяного столба, равное сумме давления поршня на воду  $p_0 - F/S$  и гидростатического давления  $\rho gh$ , станет равным атмосферному давлению  $p_0$ :

$$p_0 - \frac{F}{S} + \rho gh = p_0.$$

Отсюда находим

$$F = \rho ghS.$$

Заметим, что при высоте подъема воды  $h^* = p_0/(\rho g) = 10$  м давление поршня на воду станет равным нулю, гидростатическое давление станет равным атмосферному давлению, и поршень оторвется от воды. Между водой и нижней поверхностью поршня возникнет увеличивающееся пустое пространство (считается, что водяного пара или другого газа в этом пространстве нет). Минимальная сила, которую следует прикладывать к поршню при дальнейшем его подъеме, постоянна и равна  $p_0 S$ .

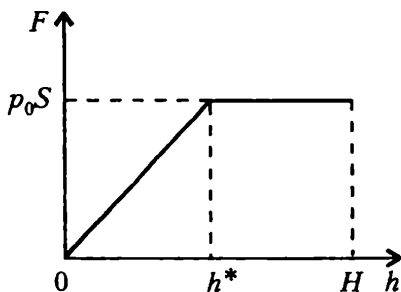


Рис.2

Зависимость  $F$  от  $h$  представлена в виде графика на рисунке 2. Площадь под графиком и равна искомой работе:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} p_0 S h^* + p_0 S (H - h^*) = \\ &= p_0 S \left( H - \frac{h^*}{2} \right) = p_0 S \left( H - \frac{p_0}{2\rho g} \right) = 10^4 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

**Задача 3.** Лыжник съезжает с нулевой начальной скоростью, не отталкиваясь палками, со склона холма по прямой, составляющей некоторый угол с горизонтальной плоскостью, и, проехав по склону расстояние  $s_0 = 60$  м, останавливается, увязнув в снегу. Условия движения таковы, что сила сопротивления, действующая на лыжника со стороны снега, пропорциональна пройденному пути; коэффициент пропорциональности  $k = 6,4$  Н/м. Найдите величину максимальной скорости лыжника при спуске, если его масса с инвентарем  $m = 90$  кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.

На съезжающего по склону холма лыжника действуют три силы: сила тяжести  $mg$ , сила реакции, перпендикулярная траектории, и сила сопротивления, равная  $F_c = ks$ , где  $s$  — длина пройденного пути, и направленная по касательной к траектории лыжника противоположно вектору его скорости.

По теореме об изменении кинетической энергии для отрезка пути  $s \leq s_0$  имеем

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = A_{\text{тяж}} + A_c.$$

Здесь  $v$  — величина скорости лыжника в момент, когда он прошел путь  $s$ . Работа постоянной силы тяжести находится по формуле

$$A_{\text{тяж}} = mgs \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = mgs \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол наклона прямолинейной траектории лыжника к горизонту. Работа силы сопротивления, во-первых, отрицательна (так как сила и перемещение противоположны), а во-вторых, это работа переменной силы. График зависимости  $F_c$  от  $s$  представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат. Как и в задаче 2, площадь под графиком имеет смысл величины соответствующей работы:

$$A_c = -\frac{1}{2} s ks = -\frac{ks^2}{2}.$$

Возвращаясь к теореме об изменении кинетической энергии, получаем

$$\frac{mv^2}{2} = mgs \sin \alpha - \frac{ks^2}{2}.$$

Искомая в задаче максимальная скорость соответствует максимальному значению правой части этого равенства. Поскольку правая часть равенства — квадратичная функция пути, ее

максимальное значение находится при значении  $s$ , равном полусумме путей  $s_1$  и  $s_2$ , обращающих ее в ноль. Ясно, что  $s_1 = 0$  и  $s_2 = (2mg \sin \alpha)/k = s_0$ . Таким образом, при  $s = s_0/2 = (mg \sin \alpha)/k$  кинетическая энергия лыжника максимальна:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = mg \frac{s_0}{2} \sin \alpha - \frac{k(s_0/2)^2}{2} = \frac{ks_0^2}{8}.$$

Отсюда находим искомую скорость:

$$v_{\max} = \frac{s_0}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} = 8 \text{ м/с}.$$

При расчете работы силы сопротивления принят во внимание линейный рост силы сопротивления с увеличением смещения  $s$ . Более того, суммарная сила ( $mg \sin \alpha - ks$ ) имеет характер квазиупругой возвращающей силы с положением равновесия при  $s = s_0/2$ . Следовательно, от старта до остановки лыжник движется по гармоническому закону, достигая максимальной скорости в положении  $s = s_0/2$ , причем  $s_0/2$  — максимальное смещение от положения равновесия (амплитуда колебаний). Из кинематики гармонических колебаний известна связь амплитуд скорости и смещения:

$$v_{\max} = \frac{s_0}{2} \omega,$$

где  $\omega = \sqrt{k/m}$  — циклическая частота колебаний. Таким образом, результат для  $v_{\max}$  можно получить и в терминах амплитуд колеблющихся величин.

\* \* \*

Особый интерес представляет теорема об изменении кинетической энергии для системы нескольких взаимодействующих тел, движущихся относительно друг друга. Рассмотрим, например, случай двух взаимодействующих тел.

Пусть  $\vec{F}_{12}$  — сила, действующая на тело 1 массой  $m_1$  со стороны тела 2 массой  $m_2$ , а  $\vec{F}_{21}$  — сила, действующая на тело 2 со стороны тела 1. В соответствии с третьим законом Ньютона,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Пусть также  $\vec{F}_1$  — сумма всех сил, действующих на тело 1 со стороны всех тел, кроме тела 2, т.е. это есть сумма всех *внешних* сил, приложенных к телу 1. Аналогичный смысл имеет сила  $\vec{F}_2$  в отношении тела 2. Для каждого из двух тел запишем теорему



об элементарном изменении его кинетической энергии:

$$\Delta \left( \frac{m_1 \vec{v}_1^2}{2} \right) = \vec{F}_{12} \vec{v}_1 \Delta t + \vec{F}_1 \vec{v}_1 \Delta t,$$

$$\Delta \left( \frac{m_2 \vec{v}_2^2}{2} \right) = \vec{F}_{21} \vec{v}_2 \Delta t + \vec{F}_2 \vec{v}_2 \Delta t.$$

Складывая почленно эти равенства, с учетом третьего закона Ньютона находим

$$\Delta \left( \frac{m_1 \vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_2^2}{2} \right) = \vec{F}_{12} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \Delta t + \vec{F}_1 \vec{v}_1 \Delta t + \vec{F}_2 \vec{v}_2 \Delta t.$$

В левой части этого равенства записано элементарное приращение кинетической энергии системы двух тел. Первое слагаемое в правой части — это вычисленная в системе отсчета, связанной с телом 2, элементарная работа силы, действующей на тело 1 со стороны тела 2. Второе и третье слагаемые — это элементарные работы внешних сил.

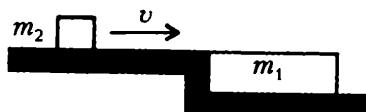


Рис. 3

Теперь — задача.

**Задача 4.** На гладкой горизонтальной плоскости покоится доска массой  $m_1$ . На доску со скоростью  $\vec{v}$  въезжает шайба массой  $m_2$  (рис. 3). Какой должна быть минимальная длина доски  $l$ , чтобы шайба не соскользнула с нее? Коэффициент трения скольжения между шайбой и доской  $\mu$ , размер шайбы мал по сравнению с длиной доски.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии системы тел  $m_1$  и  $m_2$ :

$$\frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} - \frac{m_2 v^2}{2} = -\mu m_2 g l.$$

Величину  $u$  конечной скорости шайбы и доски можно найти из закона сохранения импульса:

$$m_2 v = (m_1 + m_2) u.$$

Решая эти два уравнения, находим окончательно

$$l = \frac{v^2}{2\mu g} \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Конечно, можно было бы решить задачу, опираясь на теорему об изменении кинетической энергии для каждого тела. В таком случае соответствующая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{m_1 u^2}{2} &= F_{\text{тр}} s_1, \\ \frac{m_2 u^2}{2} - \frac{m_2 v^2}{2} &= -F_{\text{тр}} s_2, \\ m_2 v &= (m_1 + m_2) u, \\ s_2 - s_1 &= l, \\ F_{\text{тр}} &= \mu m_2 g,\end{aligned}$$

где  $s_1$  и  $s_2$  — величины перемещений тел 1 и 2 соответственно относительно неподвижной системы отсчета. Решая эту систему уравнений, приходим к тому же ответу на вопрос задачи, что и в первом варианте решения.

\* \* \*

В заключение рассмотрим задачу, в которой теорема об изменении кинетической энергии используется наоборот: по известному приращению кинетической энергии находится работа.

**Задача 5.** *Найдите коэффициент полезного действия водометного двигателя реактивного катера, движущегося с постоянной скоростью. Площадь входного отверстия двигателя  $S_1$ , выходного  $S_2$ .*

Выберем систему отсчета, связанную с катером. Пусть через двигатель каждую секунду проходит масса  $\mu$  воды, причем попадает она в двигатель со скоростью  $v_1$  (это скорость движения катера), а выходит со скоростью  $v_2$ . Импульс этой массы воды за секунду увеличивается на  $\mu(v_2 - v_1)$ , следовательно, сила тяги двигателя равна

$$F = \mu(v_2 - v_1),$$

а его полезная мощность составляет

$$N_1 = Fv_1 = \mu(v_2 - v_1)v_1.$$

Полная мощность двигателя равна приращению кинетической энергии воды, прошедшей через двигатель в единицу времени:

$$N_2 = \frac{\mu}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

Коэффициент полезного действия  $\eta$  двигателя равен отношению полезной мощности к полной:

$$\eta = \frac{N_1}{N_2} = \frac{2v_1}{v_1 + v_2}.$$

Из условия неразрывности струи воды и несжимаемости воды  $\rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2$  следует, что

$$\eta = 2 \frac{S_2}{S_1 + S_2}.$$

### Упражнения

1. Когда тело двигалось вниз по наклонной плоскости, на высоте  $H$  от ее основания оно имело скорость  $v_1$ , а когда оно двигалось вверх после упругого удара о стенку у основания плоскости, его скорость на той же высоте  $H$  была равна  $v_2$  (рис.4). Определите скорость тела при ударе о стенку.

2. Однородный брусок, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности, попадает на шероховатый участок этой поверхности шириной  $l$ , коэффициент трения о который  $\mu$ . При какой минимальной начальной скорости брусок преодолет шероховатый участок поверхности?

3. Кабина лифта массой  $m = 3 \cdot 10^3$  кг опускается с постоянной скоростью  $v = 10$  м/с. Внезапно происходит полная остановка барабана, с которого сматывается трос. Найдите максимальное удлинение троса.

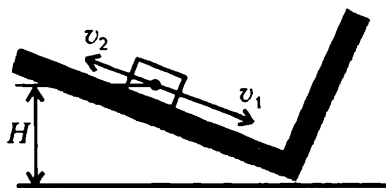


Рис. 4

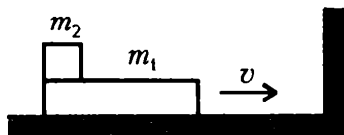


Рис. 5

са, если коэффициент упругости для той его длины, при которой произошла остановка барабана, равен  $k = 10^6$  Н/м.

4. По гладкой горизонтальной плоскости стола равномерно со скоростью  $v$  скользит доска массой  $m_1$  вместе с расположенной на ней небольшой шайбой массой  $m_2$  (рис.5). После абсолютно упругого столкновения доски с вертикальной неподвижной стеной шайба перемещается по доске на  $l$ . Определите коэффициент трения скольжения между шайбой и доской.

5. Оцените мощность двигателя, необходимую для поддержания в воздухе вертолета массой  $M = 500$  кг с лопастями длиной  $l = 3$  м. Считайте, что весь воздух под вращающимися лопастями движется однородным потоком вниз. Давление и температура воздуха равны, соответственно,  $p = 10^5$  Па и  $T = 300$  К, молярная масса воздуха  $M = 29$  г/моль, универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль  $\cdot$  К).

Изменение температуры физического объекта (твердого тела, жидкости, газа и т.п.) в процессе подвода или отвода тепла характеризуется теплоемкостью данного тела. Величина теплоемкости может при этом зависеть от температуры и объема тела, от его агрегатного состояния, а в ходе процесса теплопередачи теплоемкость может даже менять знак. Теплоемкость  $C$  определяется отношением количества теплоты  $Q$ , подведенного к телу (или отведенного от него) при бесконечно малом изменении  $\Delta T$  его температуры, к этому изменению:

$$Q = C\Delta T.$$

Первое начало термодинамики позволяет записать это соотношение в виде

$$C\Delta T = \Delta U + p\Delta V,$$

где  $\Delta U$  — изменение внутренней энергии тела, а  $p\Delta V$  ( $p$  — давление,  $\Delta V$  — малое изменение объема) — работа, совершенная телом при подводе к нему количества теплоты  $Q$ .

В природе и в технических устройствах довольно часто встречаются процессы, в ходе которых теплоемкость остается постоянной величиной (такие процессы называются политропическими). Так например, в изотермическом процессе температура не меняется ( $\Delta T = 0$ ), а тепло подводится ( $Q \neq 0$ ), поэтому теплоемкость — бесконечно большая величина. В адиабатическом процессе  $Q = 0$ , а  $\Delta T \neq 0$ , поэтому теплоемкость равна нулю. В изохорическом процессе  $\Delta V = 0$ , т.е. работа не совершается, и теплоемкость при постоянном объеме  $C_V$  характеризует изменение внутренней энергии тела. Для одноатомного идеального газа подвод тепла увеличивает кинетическую энергию хаотического движения его атомов. Изменение внутренней энергии при этом составляет  $\Delta U = C_V\Delta T$ , а соответствующая молярная теплоемкость равна  $C_V = 3R/2$ , где  $R$  — универсальная газовая постоянная. Для двухатомного идеального газа изменяется так-

же энергия вращательного движения молекул, что приводит к увеличению теплоемкости — молярная теплоемкость равна  $C_V = 5R/2$ . В случае твердых кристаллических тел (металлы, диэлектрики, полупроводники) изменяется энергия колебательного движения (кинетическая и потенциальная) атомов относительно их равновесных положений в кристаллической структуре. Для большинства твердых тел при комнатной температуре ( $T \approx 300$  К) молярная теплоемкость близка к  $C_V = 3R$ .

Заметим, что теплоемкость, приводимая в справочниках, обычно измерена в изобарическом процессе, т. е. при постоянном внешнем давлении. Подведенное тепло в этом случае идет на изменение внутренней энергии  $\Delta U$  и совершение работы  $p\Delta V$ . Для твердых тел и жидкостей изменение внутренней энергии намного больше, чем совершаемая при этом работа, поэтому для твердых тел и жидкостей теплоемкости  $C_V$  (теплоемкость при постоянном объеме) и  $C_p$  (теплоемкость при постоянном давлении) мало отличаются по величине, в то время как для газов это отличие существенно. Так, для одноатомного идеального газа молярная теплоемкость  $C_p$  больше  $C_V$  на  $R$ .

Перейдем теперь к рассмотрению примеров использования понятия теплоемкости при решении конкретных задач.

**Задача 1.** В комнате объемом  $V = 60 \text{ м}^3$  находится воздух при давлении  $p = 10^5 \text{ Па}$  и температуре  $T = 300 \text{ К}$ . На сколько градусов изменится температура воздуха в комнате за час работы в ней нагревателя мощностью  $1 \text{ кВт}$ ? Считать, что воздух прогревается равномерно и из комнаты не выходит, а передача тепла от него окружающим телам мала.

Воздух можно считать двухатомным идеальным газом с молярной теплоемкостью при постоянном объеме  $C_V = 5R/2 = 20,7 \text{ Дж/моль}$ . В комнате находится  $\nu = pV/(RT)$  молей воздуха. За час работы нагревателя выделяется количество теплоты  $Q = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}$ . Следовательно, изменение температуры составит

$$\Delta T = \frac{Q}{\nu C_V} = \frac{QRT}{C_V pV} \approx 70 \text{ К}.$$

Полученный результат явно превосходит реальный нагрев воздуха в комнате при данной мощности нагревателя. Это означает, что передачей тепла от воздуха окружающим телам пренебречь нельзя — слишком грубая оценка.

**Задача 2.** В установке для измерения теплоемкостей газов исследуемый газ под небольшим избыточным давлением прокачивается через трубку, внутри которой находится нагрева-

тель известной мощности. Измеряется разность температур газа на входе и выходе трубки и количество газа, прошедшего через трубку в единицу времени. Считая, что все тепло, выделяемое нагревателем, передается газу, найдите величину теплоемкости, измеряемой в этом опыте. На сколько измеренная теплоемкость отличается от теплоемкости при постоянном объеме?

Пусть в стационарном режиме в единицу времени на вход в трубку поступает 1 моль идеального одноатомного газа. Обозначим давление газа на входе через  $p_1$ , а температуру через  $T_1$ . Работа, совершенная компрессором над газом, будет равна  $p_1 V_1 = RT_1$ . На выходе эта порция газа совершит работу против внешнего давления, равную  $p_2 V_2 = RT_2$ , где  $p_2$  — внешнее давление, а  $T_2$  — температура газа на выходе. Используя первое начало термодинамики, можно записать

$$Q = C_V(T_2 - T_1) + p_1 V_1 - p_2 V_2 = C_V \Delta T + R \Delta T = C_p \Delta T,$$

где  $Q$  — подведенное к 1 молью газа количество теплоты. Мы получили, что в данном опыте измеряется теплоемкость при постоянном давлении  $C_p$ , которая отличается от теплоемкости при постоянном объеме  $C_V$  на  $R$ .

При решении мы нигде не использовали малость разности давлений на концах трубки. Значит ли это, что полученный результат будет справедлив и при больших перепадах давления? Нет, не значит, поскольку в этом случае при написании энергетического баланса мы не можем пренебрегать кинетической энергией поступательного движения газа.

**Задача 3.** Моль гелия сжимают в процессе 1–2 с постоянным давлением (рис. 1) так, что  $T_1 = 8T_2$ . Затем газ расширяется в процессе 2–3 с постоянной теплоемкостью до первоначального объема. Найдите эту теплоемкость, если конечная температура  $T_3$  в 16 раз меньше начальной  $T_1$ , а работа по сжатию в  $14/3$  раза больше работы по расширению.

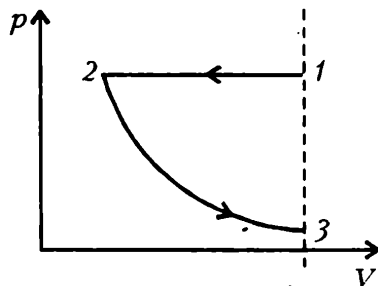


Рис. 1

Работа по сжатию равна

$$A_{12} = p_1(V_1 - V_2) = R(T_1 - T_2) = 7RT_2.$$

В соответствии с законом сохранения энергии, работа по расши-

рению равна

$$A_{23} = Q_{23} - \Delta U_{23} = (C - C_V)(T_3 - T_2) = -\frac{(C - C_V)T_2}{2}.$$

По условию задачи

$$A_{12} = \frac{14}{3} A_{23}.$$

Отсюда следует, что

$$C = C_V - 3R = -C_V = -\frac{3}{2}R.$$

Величина теплоемкости получилась отрицательной, так как тепло к газу на участке 2–3 подводится, а его температура уменьшается. Иными словами, газ в этом процессе совершает работу за счет подведенного тепла и уменьшения собственной внутренней энергии.

**Задача 4.** Найдите величину теплоемкости и работу, которую совершает моль гелия в процессе расширения  $p^2V = \text{const}$ . Начальная температура газа  $T_1$ , а конечная  $T_2$ .

Приращения давления  $\Delta p$ , объема  $\Delta V$  и температуры  $\Delta T$  связаны уравнением процесса:

$$(p + \Delta p)^2(V + \Delta V) = p^2V$$

и уравнением состояния:

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = R(T + \Delta T).$$

Раскрывая скобки и пренебрегая малыми величинами  $2p\Delta p\Delta V$ ,  $\Delta p^2V$ ,  $\Delta p^2\Delta V$  и  $\Delta p\Delta V$ , получим

$$p\Delta V = 2R\Delta T.$$

По определению теплоемкости имеем

$$C\Delta T = C_V\Delta T + p\Delta V = (C_V + 2R)\Delta T,$$

следовательно, теплоемкость в данном процессе равна

$$C = C_V + 2R = 3,5R.$$

В соответствии с законом сохранения энергии, работа, совершенная газом, составляет

$$A = Q - \Delta U = (C - C_V)(T_2 - T_1) = 2R(T_2 - T_1).$$

**Задача 5.** Моль гелия в замкнутом цикле (рис.2) совершает работу  $A = 2026$  Дж. Цикл состоит из процесса 1–2, в котором давление является линейной функцией объема, изохоры 2–3 и процесса 3–1, в котором теплоемкость газа остается постоянной. Найдите величину этой теплоемкости, если известно что  $T_1 = T_2 = 2T_3 = 100$  К, а  $V_2/V_1 = \alpha = 8$ .

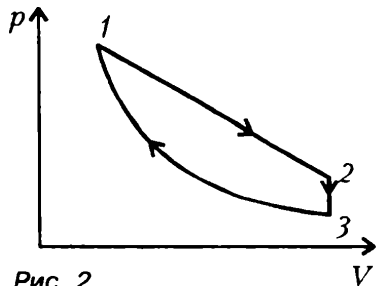


Рис. 2

Работа газа в процессе расширения равна

$$A_{12} = \frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{RT_1(\alpha^2 - 1)}{2\alpha}.$$

В процессе с постоянной теплоемкостью  $C$  по закону сохранения энергии работа газа равна

$$A_{31} = (C - C_V)(T_1 - T_3).$$

По условию работа в цикле составляет

$$A = A_{12} + A_{31}.$$

Откуда находим

$$C = C_V + \frac{A - RT_1(\alpha^2 - 1)/(2\alpha)}{T_1 - T_3} = -12,4 \text{ Дж/К}.$$

Теплоемкость получилась отрицательной, так как температура газа в этом процессе растет, а тепло отводится. Иными словами, часть работы по сжатию увеличивает внутреннюю энергию газа, а другая часть отводится в виде тепла.

**Задача 6.** Замкнутый цилиндрический сосуд делится подвижным невесомым поршнем на две части (рис.3). В нижней части цилиндра находится моль одноатомного идеального газа, а в верхней части – вакуум. Поршень связан с дном сосуда упругой пружиной. Найдите теплоемкость газа, находящегося в сосуде. Нерастянутая пружина соответствует положению поршня у дна сосуда.

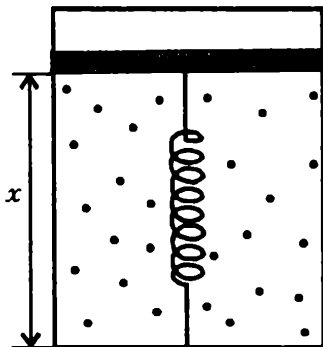


Рис. 3



Пусть в начальном положении поршень находится на расстоянии  $x$  от дна сосуда, жесткость пружины  $k$  и площадь сечения сосуда  $S$ . Тогда объем, занимаемый газом, равен  $V = xS$ , а давление газа равно  $p = (kx)/S$ . При подведении к газу количества теплоты  $Q = C\Delta T$  газ нагревается на  $\Delta T$ , а поршень перемещается на  $\Delta x$ . Работа газа при этом идет на увеличение потенциальной энергии растянутой пружины. По закону сохранения энергии

$$C\Delta T = C_v\Delta T + p\Delta V = C_v\Delta T + kx\Delta x.$$

Из уравнения состояния  $pV = kx^2 = RT$  имеем

$$2kx\Delta x = R\Delta T.$$

Таким образом, для теплоемкости  $C$  газа получаем

$$C = C_v + \frac{R}{2} = 2R.$$

### Упражнения

1. Монохроматическое излучение с длиной волны  $5,1 \cdot 10^{-7}$  м с большой вероятностью поглощается молекулой хлора, что приводит к ее диссоциации, т.е. распаду на атомы. Определите давление в сосуде с молекулярным хлором сразу после облучения коротким импульсом света с энергией 1 Дж, пренебрегая теплообменом газа со стенками сосуда. Считать, что 90% энергии импульса идет на диссоциацию, а 10% поглощается, приводя к нагреву смеси молекулярного и атомарного хлора. Перед облучением молекулярный хлор занимал объем  $22,4 \text{ см}^3$  при температуре 273 К и давлении  $10^3$  Па.

2. Покажите, что в процессе, имеющим на  $pV$ -диаграмме идеального газа вид прямой, проходящей через начало координат, теплоемкость остается постоянной. Найдите величину этой теплоемкости для одного моля одноатомного газа.

3. Моль гелия расширяется в процессе  $pV^2 = \text{const}$ . Найдите работу, произведенную газом, если его начальная температура  $T_1$ , а конечная  $T_2$ .

4. Цилиндрический сосуд делится подвижным и непроводящим тепло поршнем на две части, в которых находится по одному молю гелия. Температура газа в одной части сосуда поддерживается постоянной. Найдите зависимость теплоемкости газа, находящегося в другой части сосуда, от ее объема  $V$ . Объем всего сосуда равен  $V_0$ .

5. Моль гелия заперт невесомым поршнем и пружиной в сосуде (см. рис.3). Сила упругости пружины  $F$  зависит от ее длины  $x$  по закону  $F = kx^\alpha$ , где  $k$  и  $\alpha$  — некоторые константы. Определите величину константы  $\alpha$ , если известно, что молярная теплоемкость газа в этих условиях равна  $1,9R$ .

На первый взгляд, ответ на вопрос, сформулированный в заголовке, кажется очевидным. Ведь по определению 100 градусов по шкале Цельсия – это точка кипения воды. Но не забудьте добавить – при нормальном давлении. В Москве же, к примеру, нормальное давление  $p_0 = 760$  мм рт.ст. бывает довольно редко. И даже в течение дня атмосферное давление в той же Москве порой меняется аж на 20 мм. А это соответствует изменению температуры кипения на  $0,7^\circ\text{C}$  (или, что то же самое, на  $0,7\text{ K}$ ).

Так когда же обычно кипит вода в Москве? Обсудим это на конкретной задаче. Отметим, что условия этой и последующих задач заимствованы, с некоторыми изменениями, из билетов вступительных экзаменов в Московский физико-технический институт.

**Задача 1.** *Среднее атмосферное давление в Москве составляет  $p = 746$  мм рт.ст. Какова средняя температура кипения воды в столице России?*

Вообще говоря, давление и температура кипения связаны довольно сложной зависимостью. Но, как говорят математики, «в малом все линейно». Значит, при малых изменениях можно считать отклонения давления и температуры от нормальных значений пропорциональными друг другу. И если на 20 мм приходится  $0,7^\circ\text{C}$ , то на 14 мм придется чуть меньше  $0,5^\circ\text{C}$ , т.е. вода в Москве кипит в среднем при  $99,5^\circ\text{C}$ . (Аккуратный расчет дает цифру  $99,51^\circ\text{C}$ .)

Почему же точка кипения зависит от давления? Начнем издалека.

Всегда, когда есть свободная поверхность жидкости, происходит процесс вылета молекул из жидкости. Однако при этом возможно (почти всегда так и бывает), что имеется и обратный процесс попадания молекул из газообразной фазы (пара) в жидкость. Если эти два процесса взаимно компенсируются, то количество жидкости не меняется – существует динамическое

равновесие. Оно наступает тогда, когда давление паров жидкости равно насыщенному.

Если давление паров меньше насыщенного, происходит испарение жидкости, т.е. уменьшение ее количества. Если же давление выше насыщенного, превалирует обратный процесс конденсации паров, и количество жидкости растёт.

Когда суммарное давление над поверхностью жидкости (это может быть и только давление паров, и сумма давлений паров и воздуха) меньше давления насыщенных паров, может происходить кипение – испарение не только с поверхности, а и во всем объеме жидкой фазы. Например, в возникающих возле дна сосуда пузырьках пара давление больше внешнего, и они не схлопываются, а растут, отрываются от дна, всплывают к поверхности, там лопаются и производят характерный для кипения шум.

Итак, подчеркнем еще раз: жидкость кипит тогда, когда равновесное для данной температуры давление ее паров – давление насыщенных паров жидкости – превышает суммарное внешнее давление. А тот факт, что давление насыщенных паров растёт с ростом температуры, объяснить нетрудно. Действительно, растёт число молекул жидкости, имеющих достаточно высокую энергию, чтобы вылететь наружу; должно расти число возвращающихся молекул, а значит – и давление паров жидкости. Посторонние газы могут влиять только на характер процесса – будет это поверхностное испарение или бурное кипение, на само равновесие они не влияют.

Испарение и конденсация – один из примеров так называемых фазовых переходов. В данном случае это переход из жидкой фазы в газовую и обратно. Принципиальное различие между фазами определяется характером взаимодействия молекул. Чисто внешне газовая и конденсированная фазы (конденсированная фаза может представлять собой жидкость или твердое тело) отличаются в первую очередь плотностью. Рассмотрим пример.

**Задача 2.** *Переносной газовый баллон объемом  $V = 1 \text{ дм}^3$  заполнен пропаном  $C_3H_8$  при температуре  $t = 17^\circ\text{C}$ . Давление насыщенных паров пропана при такой температуре равно  $p = 8 \cdot 10^5 \text{ Па}$  (т.е. 8 атм.). Всего в баллоне оказалось  $m = 300 \text{ г}$  пропана. Какое количество пропана находится в газообразном состоянии, если плотность жидкого пропана  $\rho = 440 \text{ кг/м}^3$ ?*

Жидкий пропан не заполняет весь баллон, значит, он будет испаряться, пока давление не достигнет 8 атм. Плотность газооб-

разного пропана можно рассчитать по уравнению состояния идеального газа (при заданном давлении это будет достаточно хорошим приближением). В результате баланс массы принимает вид

$$m = m_r + m_{\text{ж}} = m_r + \rho \left( V - \frac{m_r RT}{Mp} \right),$$

где  $M = 44$  г/моль – молярная масса пропана,  $T = 290$  К. Отсюда

$$m_r = \frac{\rho V - m}{\rho RT/(Mp) - 1} = 5 \text{ г.}$$

Заметим, что  $\rho RT/(Mp) = 30$  есть как раз отношение плотностей жидкого и газообразного пропана. При давлениях, близких к атмосферному, эта цифра обычно приближается к тысяче, т.е. сравнимые массы газа и жидкости занимают в равновесии несопоставимые объемы. Это обстоятельство нередко используется для упрощения решения задачи. Например – такой.

**Задача 3.** В камеру объемом  $V = 1 \text{ дм}^3$ , сообщающуюся с воздухом при температуре  $t = 20^\circ \text{C}$  и давлении  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ , бросают кусочек сухого льда массой  $m = 0,5 \text{ г}$ . Камеру быстро герметически закрывают. Определите давление в камере после установления равновесия при той же температуре. Давление насыщенного пара углекислоты (при  $20^\circ \text{C}$ ) равно  $p_n = 5,65 \cdot 10^6 \text{ Па}$ .

Испарившаяся углекислота создает давление

$$p_1 = \frac{mRT}{MV} = 2,8 \cdot 10^4 \text{ Па},$$

где  $M = 44$  г/моль – молярная масса углекислоты  $\text{CO}_2$ ,  $T = 293$  К.

Добавляем атмосферное давление  $p_0$  и получаем ответ:

$$p = p_1 + p_0 = 1,28 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Обратим внимание на два момента. Во-первых, мы считали, что давление воздуха в атмосфере не меняется. В действительности из-за «пропажи» твердого вещества объем, занимаемый воздухом, немного увеличится (это было бы не трудно подсчитать, если бы была известна плотность сухого льда). Но мы, молча подразумевая, что плотность льда гораздо больше плотности газа, пренебрегли объемом, первоначально занимаемым кусочком сухого льда, что, конечно, разумно. Во-вторых, полученное нами значение давления углекислого газа меньше давле-

ния насыщенных паров при соответствующей температуре, а значит, действительно весь сухой лед испарится, и расчет с этой точки зрения проведен правильно. Конечно, так бывает не всегда.

И вот – пример.

**Задача 4.** В сосуд объемом  $V = 10 \text{ дм}^3$  налили воду в количестве  $m = 10 \text{ г}$ . При этом давление и температура в комнате равны  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$  и  $t_0 = 27^\circ\text{C}$ . Сосуд герметично закрыли и нагрели до температуры  $t = 100^\circ\text{C}$ . Каким стало давление в сосуде?

Проведем расчет давления водяных паров, как в предыдущей задаче, и получим

$$p_v = 1,38 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Но при температуре 373 К ( $100^\circ\text{C}$ ) давление насыщенных паров воды равно «лишь»  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ . Значит, вся вода не сможет испариться, и давление водяных паров будет равно как раз  $p_0$ . Добавив к этой величине изменившееся в отношении 373/300 давление воздуха, получим окончательно

$$p = p_0 + \frac{373}{300} p_0 = 2,24 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

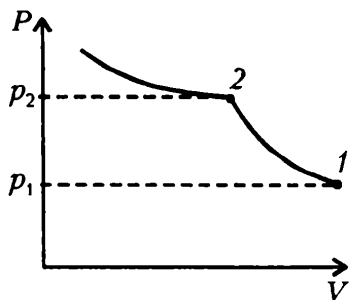
Заметим, что в задаче 1 мы должны были проводить расчет достаточно тщательно, и различие между 1 атм и  $10^5 \text{ Па}$  играло роль. В остальных задачах мы следим не за малыми изменениями, а за самой величиной давления, поэтому приближение 1 атм =  $10^5 \text{ Па}$  не представляется слишком грубым. Однако продолжим разговор о задаче 4.

Если мы теперь будем увеличивать объем сосуда, то поначалу давление паров воды будет оставаться постоянным и равным 1 атм. Значит ли это, что пары не подчиняются уравнению состояния идеального газа? И да, и нет. Сами по себе пары подчиняются уравнению идеального газа, ему не подчиняется двухфазная система: насыщенные пары в равновесии с жидкостью. Вот когда объем сосуда достигнет при неизменной температуре  $13,8 \text{ дм}^3$  (подумайте, откуда возникла эта величина), вся жидкость испарится, и дальше давление будет падать обратно пропорционально объему, как и полагается «приличному» идеальному газу. До этого объема давление не падало, потому что испарялась жидкость и возрастала масса пара. Можно сказать, что пар в целом (но не как отдельная порция) вел себя как идеальный газ, давление оставалось постоянным, а выполнение

уравнения состояния при увеличении объема обеспечивалось возрастанием массы газа.

Рассмотрим в связи с этими сообщениями изотерму смеси газов.

**Задача 5.** *Некоторую порцию влажного воздуха при давлении  $p_1$  поместили в сосуд и стали изотермически уменьшать объем (см. рисунок). Определите относительную влажность этого воздуха.*



Излом в точке 2 может быть объяснен единственным способом: до этого водяные пары были ненасыщенными, их давление росло так же, как давление сухого воздуха и как суммарное давление в сосуде. Но вот оно выросло в  $p_2/p_1$  раз, и сжимаемость смеси резко, скачком увеличилась. По-видимому, началась конденсация воды – давление ее паров уже не растет, а весь прирост общего давления объясняется ростом давления сухого воздуха. Из этого следует, что давление паров воды в исходной смеси составляло  $p_1/p_2$  от давления насыщенных паров, т.е. относительная влажность воздуха была

$$\varphi = \frac{p_1}{p_2} 100\%.$$

При решении всех рассмотренных задач мы считали, что весь воздух, соприкасающийся с водой, находится над ней. В действительности некоторое количество воздуха может быть растворено в воде. Но поскольку растворимость воздуха невелика, пренебрежение ею представляется разумным. Иначе обстоит дело с углекислым газом.

**Задача 6.** *При изготовлении в домашних условиях «газировки» углекислый газ в количестве  $m = 10$  г закачивается собственным давлением из зарядного баллончика в сифон. Свободный от воды объем сифона составляет  $V = 0,2$  дм<sup>3</sup>. При температуре  $t = 24^\circ\text{C}$  (после частичного растворения углекислоты в воде) устанавливается давление  $p = 4$  атм. Какая часть углекислоты растворилась?*

Перед подключением баллончика сифон с водой был открыт, значит, вначале воздух там находился при атмосферном давлении 1 атм. Остальные 3 атм давления должны создаваться углекислым газом. Нетрудно подсчитать, что для этого потребуется 1,1 г газа. Оставшиеся 8,9 г, очевидно, и находятся в растворенном состоянии.

## Упражнения

1. При температуре  $t = 27\text{ }^{\circ}\text{C}$  давление у основания Останкинской башни равно  $p_1 = 10^5\text{ Па}$ . При какой температуре варят суп в ресторане «Седьмое небо», расположенном на высоте  $H = 330\text{ м}$ ?

2. Баллон объемом  $V = 5\text{ дм}^3$  до отказа заполнен жидким пропаном. Какова будет масса газообразного пропана в баллоне, когда израсходуется 80% топлива? Температура  $t = 17\text{ }^{\circ}\text{C}$ , свойства пропана при этой температуре приведены в задаче 2 в тексте статьи.

3. Сосуд, заполненный воздухом при атмосферном давлении, разделен на две части подвижной перегородкой. В меньшую часть сосуда впрыснули жидкость, давление насыщенных паров которой при комнатной температуре равно  $p_{\text{н}} = 3,5\text{ атм}$ . Через некоторое время, когда еще не вся жидкость испарилась, перегородка перестала двигаться. Объем малой части сосуда при этом увеличился вдвое. Какой относительный объем занимала эта часть в начале опыта? Объемом жидкости пренебречь.

4. Влажный воздух находится в цилиндре под поршнем. Изотермическое увеличение давления в  $\alpha = 2$  раза уменьшает объем цилиндра в  $\beta = 2,5$  раза. Какую часть конечного давления составляет давление пара, если начальная относительная влажность воздуха  $\phi = 64\%$ ?

Интерес к фазовым превращениям вещества понятен. Достаточно вспомнить, что превращение воды в лед или пар и обратно обеспечивает существование всего живого на земле. Вся химическая и металлургическая промышленность, работа систем жизнеобеспечения человека тесно связаны с плавлением, кристаллизацией, парообразованием и конденсацией различных веществ. Эти превращения встречаются и в задачах по физике, причем нескольких типов.

Для решения одних задач достаточно использовать закон сохранения энергии, а именно уравнение теплового баланса.

В других задачах используются свойства насыщенного пара жидкости. С одной стороны, масса, давление, объем насыщенного пара при заданной (не слишком высокой) температуре связаны уравнением состояния газов, несмотря на значительно большее взаимодействие молекул пара между собой по сравнению с газами. С другой стороны, пока пар остается насыщенным, его давление не зависит от объема, который он занимает. Понятно, что это может происходить за счет конденсации пара или испарения жидкости, которая должна находиться в указанном объеме.

В задачах третьего типа приходится учитывать условия, при которых происходят фазовые превращения. Например, испарение (конденсация) и плавление (отвердевание) происходят обычно при постоянном давлении. Теплота испарения или плавления при этом идет не только на изменение внутренней энергии системы, но и на совершение работы против внешних сил, обеспечивающих постоянство давления. При испарении (конденсации) жидкости за счет подвода (отвода) тепла часть теплоты испарения (конденсации), расходуемая на совершение этой работы, вполне заметна. Напротив, при плавлении (отвердевании) за счет подвода (отвода) тепла работой против внешних сил, как правило, можно пренебречь.



Рассмотрим теперь несколько примеров решения задач, в которых происходят фазовые превращения.

**Задача 1.** В калориметр, содержащий лед массой  $m_1 = 0,4$  кг при температуре  $t_1 = -53^\circ\text{C}$ , налили воду массой  $m_2 = 0,1$  кг с температурой  $t_2 = 15^\circ\text{C}$ . Найдите температуру в калориметре после установления равновесия. Удельная теплоемкость льда  $c_1 = 2,1$  кДж/(кг · К), воды  $c_2 = 4,2$  кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 334$  кДж/кг.

В этой задаче не задано конечное состояние, в котором будет находиться содержимое калориметра в равновесии. Поэтому для решения необходимо провести предварительные оценки баланса тепла. Превращения льда в воду и обратно происходят при  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  (давление в задаче предполагается равным атмосферному). Найдём количество теплоты  $Q_1$ , которое потребуется, чтобы нагреть весь лед до  $0^\circ\text{C}$  от начальной температуры:

$$Q_1 = c_1 m_1 (t_0 - t_1) = 44,5 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Это тепло может отдать вода при охлаждении от  $15^\circ\text{C}$  до  $0^\circ\text{C}$  и при дальнейшем замерзании. Соответствующие количества теплоты равны

$$Q_2 = c_2 m_2 (t_2 - t_0) = 6,3 \cdot 10^3 \text{ Дж},$$

$$Q_3 = \lambda m_2 = 33,4 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Из сравнения видно, что  $Q_1 > Q_2 + Q_3$ . Потому конечная температура в калориметре будет отрицательной, вода охладится до  $0^\circ\text{C}$ , замерзнет, а получившийся лед охладится до конечной температуры  $t_3$ . Окончательный баланс тепла имеет вид

$$c_1 m_1 (t_3 - t_1) = c_2 m_2 (t_2 - t_0) + \lambda m_2 + c_1 m_2 (t_0 - t_3),$$

или

$$t_3 \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) = t_1 + \frac{c_2 m_2}{c_1 m_1} t_2 + \frac{\lambda m_2}{c_1 m_1}.$$

Отсюда находим

$$t_3 = -4,6^\circ\text{C}.$$

**Задача 2.** В теплоизолированный сосуд, содержащий газообразный азот при температуре  $T_1 = 300$  К и давлении  $p_1 = 1$  атм, впрыснули жидкий азот при  $T = 77$  К (температура кипения жидкого азота при атмосферном давлении). После того как жидкий азот испарился, в сосуде установилась температура  $T_2 = 150$  К, а давление уменьшилось до  $p_2 = 0,72$  атм. Найдите

молярную теплоту испарения жидкого азота. Молярная теплоемкость газообразного азота при постоянном объеме равна  $C_{V_1} = 20,8 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ .

Пусть вначале в сосуде содержалось  $\nu_1$  молей азота, а после установления равновесия добавилось еще  $\nu_2$  молей. Из уравнения состояния (при постоянном объеме) имеем

$$\frac{(\nu_1 + \nu_2)T_2}{\nu_1 T_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

За счет охлаждения газообразного азота происходит испарение жидкого азота и нагрев получившегося газа до конечной температуры 150 К. Баланс тепла имеет вид

$$\nu_1 C_V (T_1 - T_2) = \nu_2 L + \nu_2 C_V (T_2 - T).$$

С учетом первого равенства для молярной теплоты испарения получим

$$L = \frac{T_2 p_1}{T_1 p_2 - T_2 p_1} C_V (T_1 - T_2) - C_V (T_2 - T) \approx 5500 \text{ Дж/моль}.$$

**Задача 3.** *Замкнутый цилиндрический сосуд делится подвижным поршнем на 2 равные части. В одной из них находится воздух, в другой – вода и пар. При медленном нагревании всего сосуда поршень начинает двигаться и в некоторый момент времени останавливается. В этот момент он делит объем сосуда на части в отношении 1 : 3. Определите отношение массы воды к массе пара в начале опыта. Температуры в обеих частях сосуда все время одинаковые. Объемом, занимаемым водой в одной из частей сосуда, пренебречь.*

Пусть объем всего сосуда  $V_0$ , масса пара  $m_n$ , воды  $m_b$ . Поршень будет двигаться до тех пор, пока вся вода не испарится. При этом объем, занятый паром, увеличится от  $V_1 = V_0/2$  до  $V_2 = 3V_0/4$ , а его масса – от  $m_n$  до  $m_n + m_b$ . Уравнение состояния для воздуха дает

$$\frac{p_1(V_0 - V_1)}{T_1} = \frac{p_2(V_0 - V_2)}{T_2},$$

где  $p_1, T_1$  – начальные давление и температура, а  $p_2$  и  $T_2$  – конечные. Аналогично, для пара имеем

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{m_n + m_b}{m_n} \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Из этих двух равенств получаем

$$\frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} = \frac{V_0 - V_2}{V_0 - V_1} = \left(1 + \frac{m_b}{m_n}\right) \frac{V_2}{V_1},$$

откуда находим искомое отношение масс:

$$\frac{m_b}{m_n} = 2.$$

**Задача 4.** В кастрюлю-скороварку налили немного воды при комнатной температуре, герметично закрыли крышкой и стали медленно нагревать. Когда температура и давление в кастрюле достигли  $t = 115^\circ\text{C}$  и  $p = 3$  атм, вся вода выкипела. Найдите, какую часть объема занимала вода вначале. Давление паров воды и объем, занимаемый водой вначале, малы. Молярная масса воды  $M = 18$  г/моль, плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>, температура в комнате  $t_0 = 17^\circ\text{C}$ , атмосферное давление  $p_0 = 1$  атм.

Пусть  $V$  – объем кастрюли, а  $v$  – объем, занимаемый водой. По условию вначале давление воздуха в кастрюле составляло  $p_0 = 1$  атм, температура была  $T_0 = 290$  К. В конце опыта давление  $p$  в кастрюле складывалось из давления воздуха  $p_0 T/T_0$  и давления пара  $\rho v RT/(MV)$ . Таким образом,

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} + \frac{\rho v}{M} \frac{RT}{V},$$

откуда

$$\frac{v}{V} = M \frac{p - p_0 T/T_0}{\rho RT} = 9,3 \cdot 10^{-4} \approx 0,1\%.$$

**Задача 5.** В переносном газовом баллоне объемом  $V_0 = 5$  л может поместиться не больше  $m_0 = 2,2$  кг жидкого пропана ( $\text{C}_3\text{H}_8$ ) под давлением  $p = 10$  атм и при температуре  $T = 290$  К. Сколько пропана в газообразном состоянии останется в баллоне, если израсходовать 90% пропана?

Пусть газообразный пропан с молярной массой  $M = 44$  г/моль занимает объем  $V$  и его масса при этом равна  $M p V/(RT)$ . Предварительная оценка по этой формуле показывает, что оставшиеся 220 г пропана при давлении 10 атм заняли бы в газообразном состоянии объем, больший 2,2 л. Значит, часть пропана находится в виде жидкости с плотностью  $\rho = m_0/V_0$ . Таким образом, для оставшегося пропана массой  $0,1m_0$  можно

записать равенство

$$\rho(V_0 - V) + \frac{MpV}{RT} = 0,1m_0.$$

Отсюда находим массу пропана в газообразном состоянии:

$$m = \frac{MpV}{RT} = \frac{0,9MpV_0}{RT} \approx 0,085 \text{ кг}.$$

**Задача 6.** Приготовление пищи в кастрюле-скороварке происходит при повышенном давлении, а следовательно, и повышенной по сравнению со  $100^\circ\text{C}$  температуре. Поэтому внезапная разгерметизация кастрюли приводит к образованию «мини-гейзера»: перегретая вода при атмосферном давлении бурно вскипает и кипит до тех пор, пока не охладится до  $100^\circ\text{C}$ . Оцените, какая часть воды в скороварке испарится при разгерметизации за счет внутреннего запаса тепла, если давление внутри кастрюли  $p = 1,2$  атм. Известно, что изменение давления насыщенного пара вблизи атмосферного на  $\Delta p_0 = 27$  мм рт.ст. вызывает изменение температуры на  $\Delta t_0 = 1^\circ\text{C}$ . При  $100^\circ\text{C}$  удельная теплота испарения воды  $r = 2250$  кДж/кг, удельная теплоемкость  $c = 4,2$  кДж/(кг  $\cdot$  К).

Избыточное (по сравнению с атмосферным) на  $\Delta p = 0,2$  атм давление вызывает перегрев на

$$\Delta t = \Delta t_0 \frac{\Delta p}{\Delta p_0} = \frac{0,2}{27/760}^\circ\text{C}.$$

При охлаждении до  $100^\circ\text{C}$  за счет внутреннего запаса тепла воды массой  $m$  испаряется часть воды массой  $\Delta m$ . Из уравнения теплового баланса

$$r\Delta m = cm\Delta t$$

находим

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{c\Delta t}{r} = 0,01.$$

**Задача 7.** В цилиндре под поршнем находится смесь  $\nu$  молей жидкости и  $\nu$  молей ее насыщенного пара при температуре  $T_0$ . В изобарическом процессе смесь медленно нагрели, подведя к ней количество теплоты  $Q$ . В результате температура внутри цилиндра увеличилась на  $\Delta T$ . Найдите изменение внутренней энергии содержимого цилиндра. Начальным объемом, занимаемым жидкостью, пренебречь.

По закону сохранения энергии изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U = Q - A,$$

где  $A$  – работа, совершенная в процессе нагрева против внешних сил, поддерживающих давление в цилиндре постоянным. Подвод тепла при постоянном давлении приводит сначала к испарению жидкости при постоянной температуре, и лишь когда вся жидкость испарится, начнется нагревание пара. (Заметим, впрочем, что для величины изменения внутренней энергии системы неважно, каким именно путем система пришла из начального состояния в конечное.)

В процессе изобарического испарения жидкости против внешнего давления  $p$  совершается работа  $A_1 = p(V_{\kappa_1} - V_{0_1})$ , где  $V_{\kappa_1} = \nu RT_0/p$  – конечный объем, занятый испарившейся при постоянной температуре  $T_0$  жидкостью, а  $V_{0_1}$  – начальный объем жидкости, которым по условию можно пренебречь. Итак,

$$A_1 = \nu RT_0.$$

Аналогично, в процессе изобарического нагревания  $2\nu$  молей на  $\Delta T$  работа против внешнего давления равна  $A_2 = p(V_{\kappa_2} - V_{0_2})$ , где  $V_{\kappa_2} = 2\nu R(T_0 + \Delta T)/p$  – конечный объем пара при температуре  $T_0 + \Delta T$ , а  $V_{0_2} = 2\nu RT_0/p$  – его начальный объем. Таким образом,

$$A_2 = 2\nu R\Delta T.$$

Окончательно полная работа против внешних сил составляет

$$A = A_1 + A_2 = \nu RT_0 + 2\nu R\Delta T,$$

а изменение внутренней энергии жидкости и пара равно

$$\Delta U = Q - \nu RT_0 - 2\nu R\Delta T.$$

**Задача 8.** В герметичном сосуде при  $0^\circ\text{C}$  находится  $m = 1$  г воды. При нагревании сосуда до  $100^\circ\text{C}$  вся вода испаряется, превращаясь в насыщенный пар. Какое количество теплоты было подведено к воде в этом процессе? Удельная теплота испарения воды (при  $100^\circ\text{C}$  и атмосферном давлении)  $r = 2250$  Дж/г, удельная теплоемкость воды  $c = 4,2$  Дж/(г · К), молярная масса пара  $M = 18$  г/моль.

Объем сосуда не меняется, работа против внешних сил не совершается, поэтому подведенное количество теплоты определяется только изменением внутренней энергии системы и не

зависит от способа перехода из начального состояния в конечное.

Нагреем сначала воду (не испаряя ее) от  $0^\circ\text{C}$  до  $100^\circ\text{C}$ , т.е. на  $\Delta t = 100^\circ\text{C}$ . Увеличение ее внутренней энергии при этом составит

$$\Delta U_1 = cm\Delta t.$$

Изменение внутренней энергии воды при превращении ее в пар найдем из первого начала термодинамики:

$$\Delta U_2 = rm - A,$$

где  $A$  – работа против постоянного внешнего давления  $p = 10^5$  Па (давление насыщенного пара воды при  $100^\circ\text{C}$ ). Эта работа равна

$$A = p(V_k - V_0),$$

где  $V_k = mRT/(Mp)$  – конечный объем пара при  $100^\circ\text{C}$ ,  $V_0$  – начальный объем воды при  $0^\circ\text{C}$ , которым можно пренебречь. Итак,

$$A = \frac{m}{M} RT, \quad \Delta U_2 = rm - \frac{m}{M} RT.$$

Таким образом, к воде в указанном в задаче процессе необходимо подвести количество теплоты

$$Q = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 2500 \text{ Дж}.$$

Из решения задачи следует, что при испарении 1 г воды при  $100^\circ\text{C}$  и атмосферном давлении из 2250 Дж подведенного тепла 170 Дж, т.е. 8%, идет на работу против внешних сил, а остальные 92% тепла увеличивают внутреннюю энергию системы жидкость – пар.

В заключение рассмотрим несколько более сложную задачу.

**Задача 9.** Водяной пар находится в теплоизолированной камере при температуре  $T = 300 \text{ К}$ . Там же находится вода, масса которой мала по сравнению с массой пара. В процессе адиабатического сжатия температура пара возрастает на  $\Delta T = 1 \text{ К}$ , а часть воды испаряется. Найдите относительное увеличение массы пара в камере. Удельная теплота испарения при  $T = 300 \text{ К}$  равна  $r = 2370 \text{ кДж/кг}$ , пар можно считать идеальным газом с молярной теплоемкостью при постоянной объеме  $C_v = 3R = 25 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ . Теплоемкостью воды пренебречь. Известно также, что малые относительные изменения температуры  $\Delta T/T$  связаны с относительными измене-

ниями давления насыщенного пара  $\Delta p/p$  соотношением  $\Delta p/p = k\Delta T/T$ , где  $k = 17$ .

Давление  $p$ , объем  $V$ , масса  $m$ , температура  $T$  насыщенного водяного пара с молярной массой  $M$  (для водяного пара  $M = 18$  г/моль) связаны уравнением состояния

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

Малые изменения величин этих параметров связаны соответствующим равенством

$$p\Delta V + V\Delta p = \frac{m}{M} R\Delta T + \frac{\Delta m}{M} RT.$$

По закону сохранения энергии в процессе адиабатического сжатия работа внешних сил, равная  $-p\Delta V$  (объем пара уменьшается), идет на испарение массы воды  $\Delta m$  и на увеличение энергии пара на  $mC_v\Delta T/M$  (изменение массы пара мало). Поэтому имеем

$$-p\Delta V = m + \frac{m}{M} C_v\Delta T.$$

По условию, кроме того,

$$\frac{\Delta p}{p} = k \frac{\Delta T}{T}.$$

Из всех равенств находим искомую величину:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{kR - R - C_v}{Mr + RT} \Delta T \approx \frac{13}{18} \frac{\Delta T}{T} \approx 0,0024.$$

### Упражнения

1. В калориметр, содержащий 2 кг льда при температуре  $-5^\circ\text{C}$ , добавили 200 г воды при температуре  $+5^\circ\text{C}$ . Сколько льда будет в калориметре после установления равновесия? Удельная теплоемкость льда  $2,1$  кДж/(кг · К), воды  $4,2$  кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда  $334$  кДж/кг.

2. В сосуд с азотом впрыснули жидкий азот при температуре  $-196^\circ\text{C}$  (температура кипения жидкого азота при атмосферном давлении), который испарился. Какое давление было в сосуде сразу после испарения жидкого азота, если к этому моменту теплообменом с окружающими сосуд телами можно пренебречь? Известно, что при прогреве до комнатной температуры в сосуде установилось давление  $1,3$  атм. Начальное давление в сосуде  $1$  атм, температура комнатная, молярная теплоемкость газообразного азота  $20,8$  Дж/(моль · К), молярная теплота испарения жидкого азота  $5,5$  кДж/моль.

3. Подвижная перегородка делит герметичный теплопроводящий сосуд на две неравные части, в которых находится воздух при атмосферном давлении и комнатной температуре. В меньшую часть сосуда

впрыскивают легко испаряющуюся жидкость, давление насыщенного пара которой при комнатной температуре равно 3,5 атм. Спустя некоторое время перегородка перестала двигаться, а вся жидкость испарилась. При этом объем части сосуда, в которой находятся воздух и пары, увеличился в 2 раза по сравнению с начальным. Найдите, какую часть объема сосуда составляла вначале его меньшая часть. Объемом, занимаемым жидкостью, можно пренебречь.

4. В герметичный сосуд, содержащий сухой воздух при температуре  $+17^{\circ}\text{C}$ , впрыснули немного воды и стали медленно нагревать. Определите давление воздуха в сосуде до впрыскивания воды, если к тому моменту, когда испарилась вся вода, давление воздуха составило 46% от общего давления в сосуде. Начальный объем воды в сосуде составлял  $1/1200$  от общего объема сосуда. Молярная масса воды 18 г/моль, плотность  $1\text{ г/см}^3$ .

5. Подвижный поршень делит объем замкнутого сосуда на две части в отношении 4 : 1. В одной части находится воздух, в другой – пары воды. При медленном охлаждении сосуда поршень начинает двигаться. Какая часть пара сконденсируется к тому моменту, когда поршень будет находиться посередине сосуда? Температура в обеих частях сосуда одна и та же. Объемом, занимаемым сконденсированной водой, пренебречь.

6. Пропан ( $\text{C}_3\text{H}_8$ ) массой 300 г закачан в переносной газовый баллон объемом 1 л. Давление в баллоне 10 атм, температура  $17^{\circ}\text{C}$ . Сколько пропана в газообразном состоянии содержится в баллоне, если при указанных давлении и температуре пропан превращается в жидкость с плотностью  $440\text{ кг/м}^3$ ?

7. В цилиндре под поршнем находится  $\nu$  молей ненасыщенного водяного пара при температуре  $T$ . При медленном изобарическом охлаждении цилиндра половина пара сконденсировалась, а внутренняя энергия содержимого уменьшилась на  $\Delta U$ . Какое количество теплоты пришлось при этом отвести от цилиндра, если его температура уменьшилась на  $\Delta T$ ? Объемом, занимаемым водой, пренебречь.

8. Насыщенный водяной пар находится в теплоизолированной камере при температуре 300 К. В процессе адиабатического расширения температура в камере уменьшается на 1 К, и часть пара конденсируется. Найдите относительное уменьшение массы пара в камере. Удельная теплота испарения воды при 300 К равна  $2370\text{ кДж/кг}$ . Пар можно считать идеальным газом с молярной теплоемкостью при постоянном объеме  $25\text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ . Известно также, что малые относительные изменения температуры  $\Delta T/T$  связаны с относительными изменениями давления насыщенного пара  $\Delta p/p$  соотношением  $\Delta p/p = k\Delta T/T$ , где  $k = 17$ . Теплоемкостью воды пренебречь.

9. Смесь воды и ее насыщенного пара находится при температуре  $90^{\circ}\text{C}$ . Если смесь нагревать в изохорическом процессе, то вся вода испаряется при увеличении температуры до  $100^{\circ}\text{C}$ . Чему равно давление насыщенного пара при  $90^{\circ}\text{C}$ , если в начальном состоянии масса воды составляет 29% от общей массы смеси? Объемом, занимаемым водой, пренебречь.



Для описания электростатического поля наряду с его силовой характеристикой — напряженностью электрического поля  $\vec{E}$  — вводят энергетическую характеристику — потенциал поля  $\varphi$ . В отличие от напряженности, электростатический потенциал является скалярной величиной и равен отношению потенциальной энергии взаимодействия пробного точечного заряда с полем к величине этого заряда. Потенциальная энергия заряда, помещенного в электростатическое поле, численно равна работе, которую необходимо совершить, чтобы переместить этот заряд от выбранного нулевого уровня потенциальной энергии в данную точку пространства. Значение потенциальной энергии, а следовательно и потенциала, в данной точке зависит от выбора нулевого уровня отсчета. Физический смысл имеет не сам потенциал в точке, а его изменение в пространстве (разность потенциалов), которое не зависит от выбора нулевого уровня отсчета потенциала.

На практике электростатическое поле можно характеризовать только одной функцией — электростатическим потенциалом, поскольку напряженность электростатического поля однозначно связана с потенциалом. В случае сферически симметричного электрического поля, когда напряженность электрического поля зависит только от расстояния  $r$ , эта связь имеет вид

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr},$$

где производная  $\frac{d\varphi}{dr}$  (возможно, для читателя более привычно обозначение  $\varphi'(r)$ ) выражает быстроту приращения потенциала в данном направлении. Аналогичные соотношения можно записать для проекций вектора напряженности в декартовой системе координат:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad E_y = -\frac{d\varphi}{dy}, \quad E_z = -\frac{d\varphi}{dz}$$

(или, в иных обозначениях,  $E_x = -\varphi'(x)$ ,  $E_y = -\varphi'(y)$ ,  $E_z = -\varphi'(z)$ ; при дифференцировании по одной координате две остальные в выражении  $\varphi(x, y, z)$  надо считать постоянными).

Теперь перейдем к разбору конкретных примеров расчета потенциала электростатического поля с известным распределением напряженности поля и наоборот — расчета  $\vec{E}$  по известному распределению  $\varphi$ .

**Задача 1.** Найдите распределение потенциала между пластинами уединенного заряженного плоского конденсатора. Заряд на пластинах площадью  $S$  равен  $Q$ , а расстояние между пластинами  $d$ . Краевыми эффектами пренебречь. За нулевой уровень отсчета принять бесконечность.

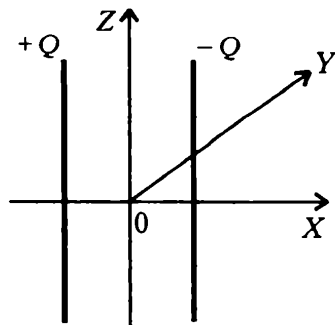


Рис. 1

Для расчета потенциала выберем систему координат, изображенную на рисунке 1, с началом координат в центре конденсатора. В области  $-d/2 \leq x \leq d/2$  электростатическое поле однородно и вектор  $\vec{E}$  направлен вдоль оси  $X$ , поэтому

$$E_x = \frac{Q}{\epsilon_0 S}, \quad E_y = 0, \quad E_z = 0.$$

Используя связь между приращением потенциала и напряженностью электрического поля, можно записать

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{Q}{\epsilon_0 S}.$$

Решение того уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = -\frac{Qx}{\epsilon_0 S} + C_1,$$

где  $C_1$  — некоторая константа. Для ее нахождения воспользуемся тем, что плоскость  $x = 0$  является эквипотенциальной поверхностью с потенциалом  $\varphi = 0$ . Действительно, силовые линии электрического поля плоского конденсатора в любой точке, включая и бесконечно удаленные точки, перпендикулярны плоскости  $x = 0$ . Поэтому при перемещении пробного заряда вдоль этой плоскости работа не совершается и потенциал всех точек этой плоскости  $\varphi = 0$ . Из условия, что при  $x = 0$   $\varphi = 0$ , следует,

что  $C_1 = 0$ , значит,

$$\varphi(x) = -\frac{Qx}{\epsilon_0 S}.$$

Поскольку  $E_y = E_z = 0$ , распределение потенциала не зависит от  $y$  и  $z$ , и плоскости  $x = \text{const}$  (при  $-d/2 \leq x \leq d/2$ ) являются эквипотенциальными поверхностями с потенциалом, равным

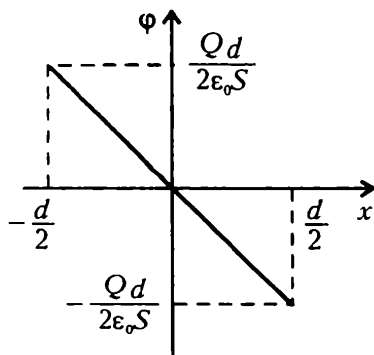


Рис. 2

значению потенциала при данном значении  $x$ . Распределение потенциала между пластинами центральной части плоского конденсатора изображено на рисунке 2.

Следует отметить, что для пластин конечного размера (т.е. для реальных конденсаторов) все эквипотенциальные поверхности  $\varphi \neq 0$  принципиально отличаются от поверхности нулевого потенциала — эквипотенциальной поверхностью нулевого потенциала всегда явля-

ется плоскость ( $x = 0$ ), а эквипотенциальными поверхностями ненулевого потенциала являются сложные замкнутые поверхности, которые только вдали от краев пластин можно считать плоскостями ( $x = \text{const}$ ).

(В качестве самостоятельного упражнения нарисуйте: 1) два аналогичных распределения при нулевом уровне потенциала на положительно заряженной пластине и на отрицательно заряженной; 2) качественное распределение  $\varphi(x)$  для реального конденсатора вблизи краев пластин; 3) качественное распределение  $\varphi(x)$  вне пластин конденсатора.)

**Задача 2.** Шар радиусом  $R$  равномерно заряжен с объемной плотностью заряда  $\rho$ . Вычислите распределение потенциала внутри и вне шара. За нулевой уровень отсчета потенциала принять бесконечность.

Сначала рассмотрим область пространства вне шара:  $R \leq r \leq \infty$ , где  $r$  — расстояние от центра шара до выбранной точки пространства. В этой области заряженный шар создает точно такое же электрическое поле, как и точечный заряд, помещенный в центр шара.<sup>1</sup> Поэтому напряженность поля на

<sup>1</sup>Подробнее об электрическом поле заряженного шара можно прочитать, например, в статье Л.Асламзова «Напряженность, напряжение, потенциал» в Приложении к журналу «Квант» №5/94. (Прим. ред.)

расстоянии  $r$  от шара равна

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho(4\pi R^3/3)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}.$$

Приращение потенциала для данного случая можно записать так:

$$d\varphi = -E(r)dr,$$

где  $dr$  — малое изменение расстояния  $r$ . Просуммируем обе части данного уравнения:

$$\int d\varphi = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2}.$$

После интегрирования получим

$$\varphi(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + C_1.$$

Для определения константы  $C_1$  используем граничное условие: при  $r \rightarrow \infty$   $\varphi \rightarrow 0$ . Отсюда следует, что  $C_1 = 0$ , значит, распределение потенциала в области  $R \leq r \leq \infty$  имеет вид

$$\varphi(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}.$$

Теперь рассмотрим область пространства внутри шара:  $0 \leq r \leq R$ . В этом случае напряженность электрического поля определяется только зарядом внутри шара радиусом  $r$  и равна

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.$$

Тогда

$$\int d\varphi = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \int r dr, \text{ и } \varphi(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + C_2.$$

Для определения константы  $C_2$  воспользуемся граничным условием: при  $r = R$   $\varphi = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$  — это значение потенциала находится из полученного выше распределения. Отсюда получим, что  $C_2 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$ . Окончательное выражение для распределения потенциала в области  $0 \leq r \leq R$  имеет вид

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2).$$

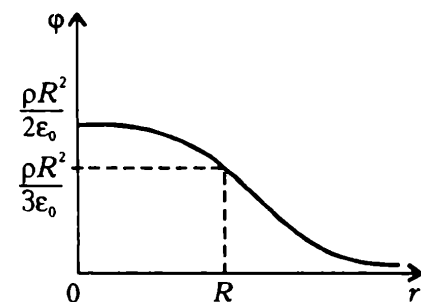


Рис. 3

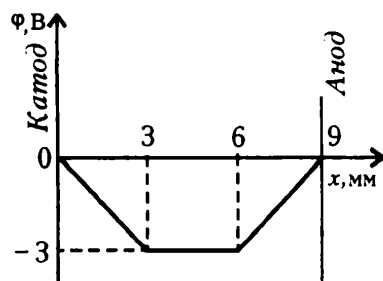


Рис. 4

График зависимости  $\varphi(r)$  при  $0 \leq r \leq \infty$  изображен на рисунке 3.

**Задача 3.** Из-за наличия объемного заряда в межэлектродном пространстве плоского вакуумного диода при нулевой разности потенциалов между катодом и анодом устанавливается распределение потенциала, показанное на рисунке 4. Найдите распределение напряженности электрического поля между катодом и анодом.

Сначала запишем распределение потенциала  $\varphi(x)$  в аналитическом виде (см. рис. 4):

$$\text{при } 0 \leq x \leq 3 \cdot 10^{-3} \quad \varphi(x) = -10^3 x,$$

$$\text{при } 3 \cdot 10^{-3} \leq x \leq 6 \cdot 10^{-3} \quad \varphi(x) = -3,$$

$$\text{при } 6 \cdot 10^{-3} \leq x \leq 9 \cdot 10^{-3} \quad \varphi(x) = -9 + 10^3 x.$$

В этих соотношениях потенциал выражен в вольтах, а координата  $x$  — в метрах.

Используя связь между напряженностью электрического поля и потенциалом ( $E_x = -d\varphi/dx$ ), получим

$$\text{при } 0 \leq x \leq 3 \cdot 10^{-3} \quad E(x) = 10^3,$$

$$\text{при } 3 \cdot 10^{-3} \leq x \leq 6 \cdot 10^{-3} \quad E(x) = 0,$$

$$\text{при } 6 \cdot 10^{-3} \leq x \leq 9 \cdot 10^{-3} \quad E(x) = -10^3.$$

Здесь напряженность выражена в вольтах на метр.

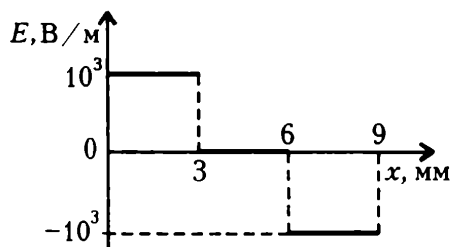


Рис. 5

Распределение  $E(x)$  между катодом и анодом изображено на рисунке 5.

Реальное распределение потенциала в плоском диоде, конечно, не имеет изломов — это гладкая кривая параболического вида. И, естественно, распределение напряженности не имеет скачков (разрывов).

(Кстати, а что означают скачки на полученной нами зависимости  $E(x)$ ? Попробуйте нарисовать качественное распределение объемного заряда в межэлектродном пространстве диода.)

**Задача 4.** *Проводящий незаряженный шар радиусом  $R$  расположен в поле точечного заряда  $Q$ , находящегося на расстоянии  $L$  от центра шара. Определите потенциал шара. За нулевой уровень отсчета потенциала принять бесконечность.*

Проводящий шар существенным образом изменяет структуру электрического поля точечного заряда (особенно в окрестности шара). Свободные заряды шара (электроны проводимости) перераспределяются, и на поверхности шара возникает такое распределение поверхностных зарядов (рис. 6), чтобы суммарное поле внутри шара (поле точечного заряда  $Q$  и поле поверхностных зарядов шара) было равно нулю. Именно условие отсутствия электростатического поля в изолированных проводниках лежит в основе явления электростатической индукции — наведения поверхностных зарядов на проводниках во внешнем электрическом поле. (Поскольку электрическое поле внутри шара равно нулю, можно удалить внутреннюю часть шара и оставить тонкую сферическую оболочку. Очевидно, что это никак не повлияет на пространственное распределение электрического поля и на распределение индуцированных зарядов по поверхности шара. Поэтому задачи о нахождении потенциала проводящего шара или сферы абсолютно эквивалентны.)

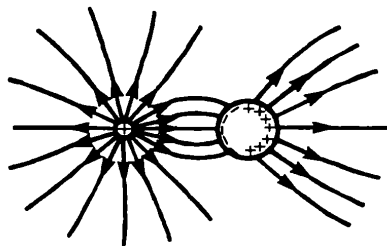


Рис. 6

Для решения задачи воспользуемся одним из фундаментальных свойств электростатического поля — принципом суперпозиции. В нашем случае электрическое поле во всем пространстве будет являться суперпозицией полей, создаваемых точечным зарядом и индуцированными поверхностными зарядами на шаре. Найдем сначала потенциал в центре шара  $\varphi_0$ , который определяется алгебраической суммой потенциалов поля точечного заряда  $Q$  и поля индуцированных зарядов с поверхностной плотностью  $\sigma(r)$ :

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} + \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i \Delta S_i}{4\pi\epsilon_0 R},$$

где  $\Delta S_i$  — малый элемент поверхности шара, а  $\sigma_i$  — плотность его заряда. В числителе второго слагаемого стоит суммарный поверхностный заряд шара, но шар не заряжен, поэтому это слагаемое равно нулю и, следовательно, потенциал в центре шара равен

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}.$$

Поскольку весь объем шара является эквипотенциальным, потенциал шара равен потенциалу его центра:

$$\varphi = \varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}.$$

Мы получили, на первый взгляд, неожиданный результат: потенциал шара в поле точечного заряда не зависит от радиуса шара. А на что же влияет размер шара? Оказывается, на величину и пространственное распределение электрического поля вне шара. Самое забавное заключается в том, что мы, не зная электрического поля снаружи шара, смогли найти его потенциал.

(Задача о нахождении распределения поля вне шара выходит за рамки школьной программы, но она имеет строгое решение. Для любознательных сообщим, что данное поле будет эквивалентно полю, создаваемому тремя точечными зарядами: исходным зарядом  $Q$ , зарядом величиной  $RQ/L$ , находящимся в центре шара, и зарядом, равным заряду в центре шара, но противоположным по знаку и расположенным на прямой, соединяющей

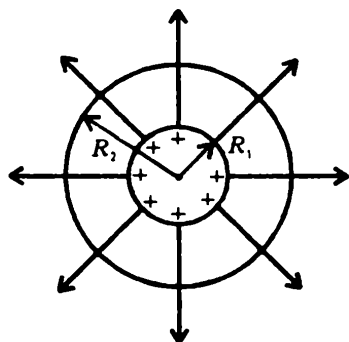


Рис. 7

центр шара с зарядом  $Q$ , на расстоянии  $x = R^2/L$  от центра шара.<sup>2</sup> Предлагаем проверить самостоятельно, что для системы этих трех зарядов сферическая поверхность радиусом  $R$  является эквипотенциальной поверхностью с потенциалом  $Q/(4\pi\epsilon_0 L)$ .)

**Задача 5.** Металлический шар радиусом  $R_1$ , заряженный до потенциала  $\varphi_1$ , симметрично окружен тонкостенной проводящей незаряженной сферой радиусом  $R_2$  (рис. 7). Чему будет равен потенциал шара в

<sup>2</sup>Подробнее об этом можно прочитать в статье А. Черноуцана «Метод электростатических изображений» в «Кванте» №1 за 1996 год. (Прим. ред.)

двух случаях: 1) если заземлить сферу; 2) если закоротить шар и сферу (соединить проводником)?

Сначала поговорим немного о физической стороне процесса заземления. С технической точки зрения, заземлить некое проводящее тело означает соединить данное тело и Землю хорошим проводником. Обычно для этого в Землю закапывают достаточно большой металлический лист — чем больше поверхность соприкосновения металла и Земли, тем лучше. С физической точки зрения, заземлить означает выровнять потенциалы Земли и проводящего тела. Для справки: поверхностный заряд Земли отрицательный, напряженность электрического поля вблизи поверхности Земли составляет приблизительно 100 В/м, а потенциал Земли относительно бесконечности равен 400000 В. Возникает вопрос: а какой потенциал имеет незаряженный проводник (не заземленный) у поверхности Земли? Однозначно ответить на этот вопрос нельзя, все зависит от конкретной ситуации: наличия окружающих проводящих предметов, высоты от поверхности Земли, проводящих свойств окружающего воздуха и т.д. Но когда речь идет о задачах, подобной этой, считается, что потенциал незаряженного проводника равен потенциалу Земли. Поэтому, если на проводнике имеется заряд, то такой проводник приобретает дополнительный потенциал, вызванный собственным электрическим полем. При постоянном потенциале Земли значения дополнительного потенциала заряженного тела, отсчитанные от бесконечности или от поверхности Земли, совпадают, а потенциал Земли в этом случае можно считать равным нулю.

Теперь разберем первый случай нашей задачи, когда сфера заземлена, т.е. потенциал сферы стал равным нулю. Поскольку потенциал шара до заземления был равен  $\varphi_1$ , на шаре находился заряд  $Q_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 \varphi_1$ . Обозначим через  $Q_2$  заряд, который перейдет с Земли на сферу после заземления, и запишем условие равенства нулю потенциала сферы:

$$\varphi_1 \frac{R_1}{R_2} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 0.$$

Отсюда

$$Q_2 = -4\pi\epsilon_0 R_1 \varphi_1 = -Q_1.$$

Это означает, что электрическое поле вне оболочки будет отсутствовать, а шар и сфера будут представлять из себя заряженный сферический конденсатор (рис.8). Потенциал шара, очевидно,



будет равен

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \varphi_1 - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \varphi_1 \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right).$$

Во втором случае, когда шар и оболочка закорочены, их потенциалы будут равны. Легко сообразить, что равенство

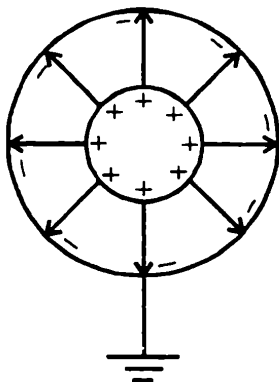


Рис. 8

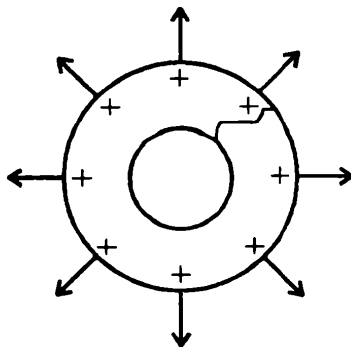


Рис. 9

потенциалов означает отсутствие электрического поля между шаром и сферой; следовательно, заряд шара равен нулю, а заряд сферы равен заряду шара. Покажем это. Пусть после соединения на сферу перейдет заряд  $Q_3$ , тогда на шаре останется заряд  $Q_1 - Q_3$ . Условие равенства потенциалов шара и сферы можно записать в виде

$$\frac{Q_1 - Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{Q_1 - Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Отсюда следует, что  $(Q_1 - Q_3)(R_2 - R_1) = 0$ . Поскольку  $(R_2 - R_1) \neq 0$ , получаем  $Q_1 = Q_3$ . Таким образом, потенциал шара равен

$$\varphi_3 = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \varphi_1 \frac{R_1}{R_2}.$$

Электрическое поле системы шар — сфера для данного случая изображено на рисунке 9.

### Упражнения

1. Найдите распределение потенциала для проводящего заряженного шара радиусом  $R_1$ , окруженного толстостенной незаряженной проводящей сферой с радиусами  $R_2$  (внутренний) и  $R_3$  (внешний). Заряд шара  $Q$ . За нулевой уровень потенциала принять бесконечность.

2. Внутри плоского заряженного конденсатора, расстояние между пластинами которого  $d$ , на расстоянии  $a$  ( $a < d/2$ ) от положительно заряженной пластины расположен точечный заряд  $q$ . Заряд конденсатора  $Q$ , а площадь пластин  $S$ . Какую работу необходимо совершить, чтобы переместить заряд  $q$  на бесконечность?

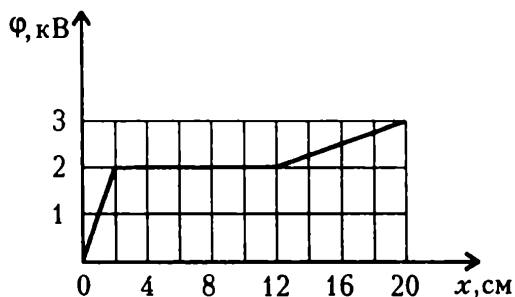


Рис. 10

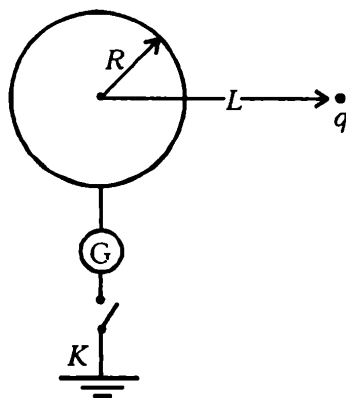


Рис. 11

3. Распределение потенциала между электродами газоразрядной трубки при тлеющем разряде изображено на рисунке 10. Найдите распределение напряженности электрического поля между электродами.

4. Незаряженный проводящий шар радиусом  $R$  расположен в поле точечного заряда  $q$  (рис. 11). Расстояние между зарядом и центром шара  $L$ . Шар через гальванометр  $G$  и ключ  $K$  соединен с Землей. Какой заряд протечет через гальванометр после замыкания ключа?

# КАТУШКИ ИНДУКТИВНОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

*В.Можаев*

Прежде всего поясним, что имеют в виду, когда говорят о катушке индуктивности. Любой элемент электрической цепи обладает индуктивностью. Например, кусок провода длиной 1 м и диаметром 1 мм в вакууме имеет индуктивность  $10^{-6}$  Гн. Такого порядка индуктивность в реальных электрических цепях существует всегда, и ее обычно называют паразитной индуктивностью. А когда говорят о катушке индуктивности, то подразумевают индуктивность, которая сосредоточена в одном элементе цепи – в катушке – и по величине превосходит паразитную на два и более порядков.

Как правило, катушка индуктивности представляет собой достаточно большое количество витков изолированного провода, намотанного на цилиндрический или тороидальный каркас, причем для увеличения индуктивности каркасы заменяют на магнитные сердечники в виде цилиндров или торов. Витки наматываются в одну сторону, т.е. когда через катушку протекает ток, все направления токов в витках совпадают (по часовой стрелке или против часовой стрелки).

Все реальные катушки индуктивности (кроме сверхпроводящих) обладают омическим сопротивлением, поэтому эквивалентной схемой такой катушки является последовательное соединение идеальной катушки, обладающей чисто индуктивным сопротивлением, и резистора, сопротивление которого равно сопротивлению обмотки. Однако во всех задачах, разбираемых в этой статье, под катушкой индуктивности будет подразумеваться идеальная индуктивность (чисто реактивный элемент).

Теперь обсудим, какова роль катушки индуктивности в замкнутой электрической цепи. При протекании через катушку постоянного тока она является пассивным элементом, не оказывающим на ток никакого влияния. Но она была активна тогда, когда происходило установление этого тока, — все это время катушка аккумулировала в себя динамическую энергию носите-

лей тока в виде энергии магнитного поля. При токе через катушку  $I$  и ее индуктивности  $L$  эта энергия равна  $LI^2/2$ .

Наиболее интересно ведет себя катушка индуктивности в те моменты, когда происходит изменение протекаемого через нее тока. Изменение тока приводит к изменению магнитного поля внутри катушки, что, в свою очередь, вызывает появление вихревого электрического поля. По правилу Ленца в моменты нарастания тока напряженность вихревого электрического поля внутри витков катушки направлена против тока, а в моменты уменьшения тока – вдоль тока. Работа, совершаемая вихревым электрическим полем по перемещению единичного положительного заряда вдоль всей обмотки катушки, численно равна ЭДС самоиндукции катушки. При постоянной индуктивности катушки ЭДС самоиндукции равна  $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$ .

Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров поведения катушки индуктивности в электрической цепи.

**Задача 1.** В схеме, изображенной на рисунке 1, переключатель  $\Pi$  находится в положении «1» (цепь обесточена). Параметры схемы указаны на рисунке, внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо мало.

1) Определите начальные токи через второй резистор ( $R_2$ ) и катушку индуктивности сразу после перевода переключателя в положение «2». 2) Чему будут равны эти токи после установления стационарного состояния?

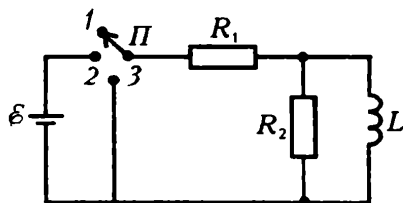


Рис. 1

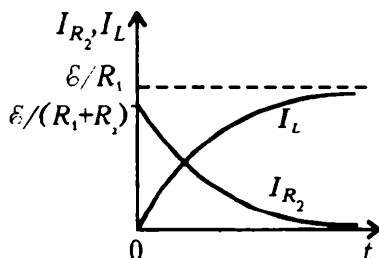
3) Какое количество теплоты выделится на втором резисторе при переводе переключателя из положения «2» в положение «3»?

1) За время замыкания (установление хорошего контакта), которое чрезвычайно мало, появляющийся ток в катушке вызовет ЭДС самоиндукции, которая будет препятствовать возникновению этого тока, поэтому ток в катушке будет равен нулю. С другой стороны, ничто не препятствует установлению тока, который будет протекать через источник и резисторы, при этом ток через резистор сопротивлением  $R_2$  будет равен

$$I_{R_2} = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}.$$

2) Дальше будет происходить следующее. Поскольку в начальный момент ток в катушке равен нулю, но не равна нулю его производная  $dI/dt$ , ток в катушке будет нарастать, а ток во

втором резисторе будет уменьшаться соответственно равенству  $LdI/dt = I_{R_2} R_2$ . Иными словами, будет идти переходной процесс. В стационарном состоянии производная  $dI/dt$  должна быть равна нулю; следовательно, должен быть равен нулю и ток через второй резистор. Ток в цепи будет теперь течь через первый резистор ( $R_1$ ) и катушку и будет равен



$$I_L = \frac{\varepsilon}{R_1}.$$

На рисунке 2 изображены графики зависимости токов  $I_{R_2}$  и  $I_L$  от времени в переходном процессе.

Рис. 2

3) После перевода переключателя в положение «3» в начальный момент в катушке течет ток  $I_L = \varepsilon/R_1$ . Очевидно, что в дальнейшем будет происходить рассеяние (диссипация) энергии, запасенной в катушке. Эта энергия выделится на резисторах в виде тепла:

$$Q_1 + Q_2 = \frac{LI_L^2}{2} = \frac{L\varepsilon^2}{2R_1^2}.$$

Поскольку резисторы соединены параллельно,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Из совместного решения последних двух уравнений получим

$$Q_2 = \frac{L\varepsilon^2}{2R_1(R_1 + R_2)}.$$

**Задача 2.** В схеме на рисунке 3 ЭДС батареи  $\varepsilon$ , сопротивление резистора  $R$ , индуктивности катушек  $L_1$  и  $L_2$ , оба ключа разомкнуты и цепь обесточена. Сначала замыкают ключ  $K_1$ , а через некоторое время, когда ток через резистор достигает значения  $I_0$ , замыкают ключ  $K_2$ . Определите установившиеся значения токов через катушки.

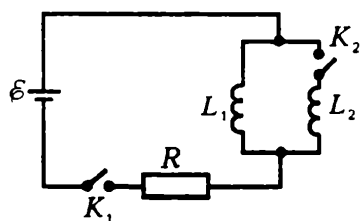


Рис. 3

Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

В качестве начала отсчета времени выберем момент замыкания ключа  $K_2$ . Сразу после замыкания начальные токи в катушках равны  $I_{10} = I_0$  и  $I_{20} = 0$  соответственно.

Поскольку катушки соединены параллельно, для произвольного момента времени  $t$ , полагая, что токи в катушках текут в одном направлении, можно записать

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt}.$$

Перепишем это равенство в виде

$$\frac{d}{dt}(L_1 I_1 - L_2 I_2) = 0,$$

откуда следует

$$L_1 I_1 - L_2 I_2 = \text{const}.$$

Из начальных условий найдем, что константа эта равна  $L_1 I_0$ ; следовательно, для любого момента времени (после замыкания ключа  $K_2$ ) токи  $I_1$  и  $I_2$  в катушках связаны соотношением

$$L_1 I_1 - L_2 I_2 = L_1 I_0. \quad (1)$$

После установления стационарного состояния катушки становятся пассивными элементами, ЭДС самоиндукции в каждой из них равна нулю. Обозначим установившиеся токи через  $I_{1y}$  и  $I_{2y}$ . На основании закона Ома для замкнутой цепи можно записать

$$\mathcal{E} = (I_{1y} + I_{2y})R. \quad (2)$$

Соотношение (1) справедливо для любого момента времени  $t > 0$ ; следовательно, оно справедливо и для момента установления стационарного состояния:

$$L_1 I_{1y} - L_2 I_{2y} = L_1 I_0. \quad (3)$$

Совместное решение уравнений (2) и (3) позволяет найти  $I_{1y}$  и  $I_{2y}$ :

$$I_{1y} = \frac{L_1 I_0 + L_2 \mathcal{E}/R}{L_1 + L_2}, \quad I_{2y} = \frac{L_1 (\mathcal{E}/R - I_0)}{L_1 + L_2}.$$

**Задача 3.** На рисунке 4 изображена цепь, в которой в начальный момент ключ  $K$  разомкнут, а в замкнутом контуре схемы течет установившийся ток. Определите величину и направление тока через резистор ( $R$ ) сразу после замыкания ключа. Параметры схемы: ЭДС первой батареи  $\mathcal{E}_1 = 10$  В, внутренние сопротивления батарей  $r_1 = 5$  Ом и  $r_2 = 20$  Ом, сопротивление резистора  $R = 4$  Ом.

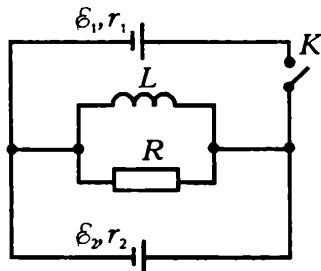


Рис. 4

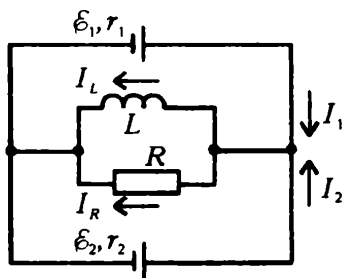


Рис. 5

До замыкания ключа через катушку течет ток  $I_L = \varepsilon_2/r_2$ , а ток через резистор равен нулю. Сразу после замыкания ключа ток через катушку остается неизменным. Если в этот момент через батареи текут токи  $I_1$  и  $I_2$  (рис.5), то ток через резистор, очевидно, будет равен

$$I_R = I_1 + I_2 - I_L.$$

На основании закона Ома (точнее – второго правила Кирхгофа) для двух контуров, охватывающих батарею и резистор, можно записать

$$\varepsilon_1 = I_1 r_1 + (I_1 + I_2 - I_L) R,$$

$$\varepsilon_2 = I_2 r_2 + (I_1 + I_2 - I_L) R.$$

Умножив первое уравнение на  $r_2$ , а второе на  $r_1$  и сложив левые и правые части уравнений, получим

$$\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1 = (I_1 + I_2) (R(r_1 + r_2) + r_1 r_2) - I_L R(r_1 + r_2).$$

Используя выражение для  $I_L$ , найдем суммарный ток через батареи:

$$I_1 + I_2 = \frac{\varepsilon_1 r_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} + \frac{\varepsilon_2}{r_2},$$

а также ток через резистор:

$$I_R = \frac{\varepsilon_1 r_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} = 1 \text{ A}.$$

Поскольку мы получили положительное значение тока  $I_R$ , выбранное направление тока (см. рис.5) соответствует действительности.

**Задача 4.** Электрическая цепь (рис.6) состоит из батареи с ЭДС  $\varepsilon$ , резистора сопротивлением  $R$  и катушки переменной

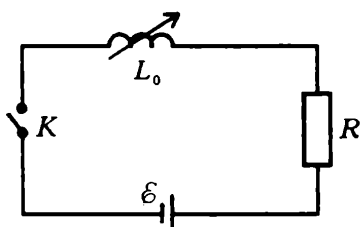


Рис. 6

индуктивности, начальное значение которой равно  $L_0$ . Через некоторое время после замыкания ключа  $K$  ЭДС самоиндукции в катушке равна  $\varepsilon_0$ . Начиная с этого момента, индуктивность катушки изменяют таким образом, что ЭДС самоиндукции остается постоян-

ной и равной  $\mathcal{E}_0$ . 1) Определите ЭДС самоиндукции в катушке сразу после замыкания ключа. 2) Найдите зависимость изменяющейся индуктивности катушки от времени. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

1) Сразу после замыкания ключа начальный ток в цепи равен нулю, поэтому ЭДС самоиндукции равна ЭДС батареи, взятой с обратным знаком:

$$\mathcal{E}_s = -\mathcal{E}.$$

2) Выберем за начало отсчета времени момент, когда ЭДС самоиндукции в катушке достигает значения  $\mathcal{E}_0$ , и рассмотрим произвольный момент времени  $t$  в этой системе отсчета. На основании закона Ома для замкнутой цепи можно записать

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = IR,$$

где  $I$  — сила тока в цепи в данный момент времени. Из этого уравнения следует, что ток в цепи, начиная с момента  $t = 0$ , будет оставаться постоянным и равным

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}{R}.$$

Следовательно, при  $t > 0$  ЭДС самоиндукции будет определяться выражением

$$I \frac{dL}{dt} = \dot{\mathcal{E}}_0.$$

Отсюда получаем

$$L = L_0 + \frac{\mathcal{E}_0}{I} t,$$

или, после подстановки выражения для тока,

$$L = L_0 + \frac{Rt}{\mathcal{E}/\mathcal{E}_0 - 1}.$$

**Задача 5.** В колебательном контуре (рис. 7) конденсатор емкостью  $C$  заряжен до некоторого напряжения. После замыкания ключа  $K$  в контуре происходят свободные незатухающие колебания, при которых амплитудное значение тока в катушке индуктивностью  $L_2$  равно  $I_{2m}$ . Когда ток в катушке индуктивностью  $L_1$  достигает максимального значения, из нее быстро (за время, малое по сравнению с перио-

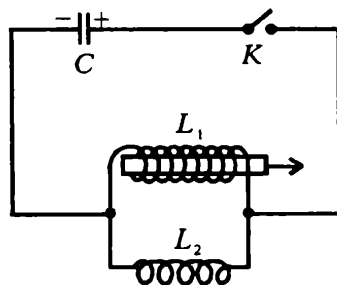


Рис. 7



дом колебаний) выдвигают сердечник, что приводит к уменьшению ее индуктивности в  $\mu$  раз. Найдите максимальное напряжение на конденсаторе при колебаниях в контуре после выдвигения сердечника.

В любой момент времени после замыкания ключа ЭДС самоиндукции катушек между собой равны:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{d\Phi_2}{dt},$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — магнитные потоки, пронизывающие соответствующие катушки. В интегральной форме это равенство имеет вид

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \text{const}.$$

Поскольку сразу после замыкания ключа  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ , константа также равна нулю. Следовательно, в любой момент времени после замыкания ключа  $\Phi_1 = \Phi_2$ . Пока индуктивности катушек остаются неизменными, последнее равенство можно записать в виде  $L_1 I_1 = L_2 I_2$ , где  $I_1$  и  $I_2$  — токи в катушках. В тот момент, когда ток во второй катушке достигает максимального значения  $I_{2m}$ , ток в первой катушке будет также максимален и равен  $I_{1m} = I_{2m} L_2 / L_1$ .

После быстрого выдвигания сердечника магнитные потоки в катушках сохраняются. Для первой катушки это условие запишем так:

$$L_1 I_{1m} = \frac{L_1}{\mu} I'_{1m},$$

откуда найдем новый ток в катушке:

$$I'_{1m} = \mu I_{1m} = \frac{\mu L_2}{L_1} I_{2m}.$$

Сохранение магнитного потока для второй катушки означает сохранение тока в ней:  $I'_{2m} = I_{2m}$ .

Суммарная энергия магнитного поля катушек равна

$$W = \frac{L_1}{\mu} \frac{(I'_{1m})^2}{2} + \frac{L_2 I_{2m}^2}{2} = \frac{L_2 (L_1 + \mu L_2)}{2L_1} I_{2m}^2.$$

По закону сохранения энергии энергия магнитного поля катушек будет полностью перекачиваться в энергию электрического поля конденсатора:

$$\frac{L_2 (L_1 + \mu L_2)}{2L_1} I_{2m}^2 = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Отсюда находим максимальное напряжение на конденсаторе:

$$U_m = I_{2m} \sqrt{\frac{L_2(L_1 + \mu L_2)}{L_1 C}}.$$

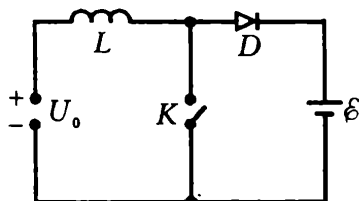


Рис. 8

**Задача 6.** Для подзарядки автомобильного аккумулятора с ЭДС

$\mathcal{E} = 12$  В от источника постоянного напряжения  $U_0 = 5$  В собрана схема (рис. 8), содержащая катушку индуктивностью  $L = 0,1$  Гн, идеальный диод  $D$  и прерыватель  $K$ , который периодически замыкается и размыкается на одинаковые промежутки времени  $\tau_1 = \tau_2 = 0,1$  с. За какое время можно таким образом осуществить подзаряд аккумулятора на  $q = 0,1$  ампер-часов? Омическими потерями пренебречь.

В начальный момент времени ключ  $K$  разомкнут и цепь обесточена. После замыкания переключателя в цепи, содержащей источник постоянного напряжения, катушку и ключ, начнет нарастать ток. Согласно закону Ома, для данной цепи можно записать

$$U_0 - L \frac{dI}{dt} = 0.$$

Поскольку начальный ток равен нулю, зависимость тока от времени будет иметь вид

$$I(t) = \frac{U_0}{L} t.$$

Через время  $\tau_1$  ток в катушке станет равным  $I(\tau_1) = U_0 \tau_1 / L$ .

После размыкания ключа начинается процесс подзарядки аккумулятора. Закон Ома для новой замкнутой цепи запишется в виде

$$U_0 - \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = 0, \text{ или } \frac{dI}{dt} = -\frac{\mathcal{E} - U_0}{L}.$$

В этом режиме ток линейно спадает со временем по закону

$$I(t) = \frac{U_0}{L} \tau_1 - \frac{(\mathcal{E} - U_0)t}{L}.$$

Через время  $t_0 = U_0 \tau_1 / (\mathcal{E} - U_0)$  ток в цепи упадет до нуля. Так как  $\tau_2 = \tau_1 > t_0$ , ток действительно прекратится и оставшееся

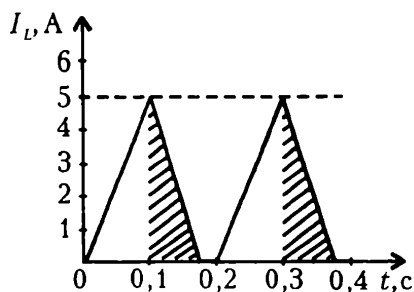


Рис. 9

время цепь будет обесточена, а после замыкания ключа все будет снова повторяться.

На рисунке 9 показана периодическая зависимость тока через катушку от времени. Заштрихованные участки соответствуют процессу подзарядки. Каждый цикл подзарядки протекает за время  $t_3 = \tau_1 + \tau_2$ , а заряд  $\Delta q$ ,

поступающий при этом в аккумулятор, равен заштрихованной площади:

$$\Delta q = \frac{1}{2} I_L(\tau_1) t_0 = \frac{U_0^2 \tau_1^2}{2L(\varepsilon - U_0)}.$$

Количество циклов  $N$  определяется отношением

$$N = \frac{q}{\Delta q} = \frac{2qL(\varepsilon - U_0)}{U_0^2 \tau_1^2}.$$

Тогда полное время подзарядки будет равно

$$T = N(\tau_1 + \tau_2) = \frac{2qL(\varepsilon - U_0)(\tau_1 + \tau_2)}{U_0^2 \tau_1^2} = 22,4 \text{ ч.}$$

### Упражнения

1. Какое количество теплоты выделится в схеме на рисунке 10 после размыкания ключа  $K$ ? Параметры схемы указаны на рисунке.

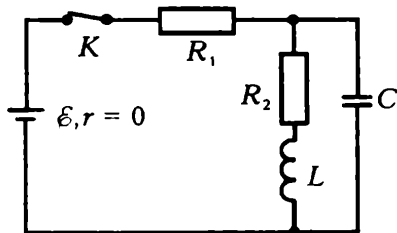


Рис. 10

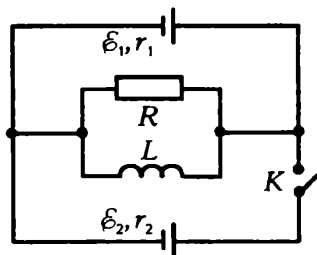


Рис. 11

2. В схеме, изображенной на рисунке 11, в начальный момент ключ  $K$  разомкнут, а в замкнутом контуре схемы течет установившийся ток. Определите величину и направление тока через резистор сразу после замыкания ключа. Параметры схемы: ЭДС второй батареи  $\varepsilon_2 = 10 \text{ В}$ , ее внутреннее сопротивление  $r_2 = 20 \text{ Ом}$ , внутреннее сопротивление первой батареи  $r_1 = 5 \text{ Ом}$ , сопротивление резистора  $R = 4 \text{ Ом}$ .

3. Электрическая цепь (рис. 12) включает в себя батарею с ЭДС  $\mathcal{E}$ , катушку индуктивностью  $L$  и переменное сопротивление, начальное значение которого равно  $R_0$ . Через некоторое время после замыкания ключа  $K$  ЭДС самоиндукции в катушке равна  $\mathcal{E}_0$ . Начиная с этого момента, переменное сопротивление изменяют таким образом, что ЭДС самоиндукции в катушке остается постоянной и равной  $\mathcal{E}_0$ . 1) Определите ЭДС самоиндукции в катушке сразу после замыкания ключа. 2) Найдите зависимость изменяющегося сопротивления от времени. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

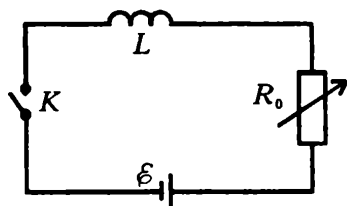


Рис. 12

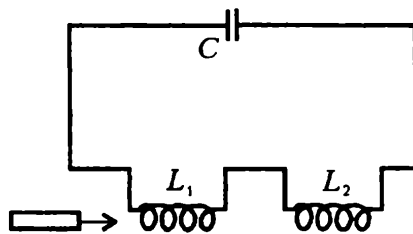


Рис. 13

4. В колебательном контуре, состоящем из двух последовательно соединенных катушек с индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$  и конденсатора емкостью  $C$  (рис. 13), происходят свободные незатухающие колебания, при которых амплитуда колебаний тока равна  $I_0$ . Когда сила тока в первой катушке максимальна, в нее быстро (за время, малое по сравнению с периодом колебаний) вставляют сердечник, который приводит к увеличению ее индуктивности в  $\mu$  раз. Определите максимальное напряжение на конденсаторе: 1) до вставки сердечника; 2) после вставки сердечника.

Свет представляет собой электромагнитное излучение, испускаемое источником в диапазоне длин волн порядка 400 – 800 мкм. Линии, по которым распространяются электромагнитные волны, называют лучами, или лучевыми траекториями. Реально световой луч – это узкий расходящийся световой пучок.

Оказывается, что для большого круга задач можно пользоваться геометрической оптикой лучей, основанной на принципе Ферма. Смысл его заключается в том, что световая волна всегда распространяется таким образом, что длина светового луча, проходящего от одной точки пространства до другой, должна быть минимальной. В случае пространственно однородной среды этот принцип приводит к закону прямолинейного распространения света, а в случае падения волны на плоскую границу раздела двух сред – к законам отражения и преломления света:

$$\alpha = \varphi \text{ и } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1},$$

где  $\alpha$  и  $\varphi$  – углы падения и отражения соответственно,  $\beta$  – угол преломления, а  $n_1$  и  $n_2$  – показатели преломления двух сред. Не следует забывать и об обратимости световых лучей, т.е. об их взаимности: луч, идущий в обратном направлении, идет тем же путем, каким пришел и прямой луч. Именно принцип взаимности

и принцип Ферма позволяют решать физические задачи на геометрическую оптику.

**Задача 1.** На расстоянии  $d$  от плоского зеркала расположен точечный источник света  $S$ . Построением найдите положение изображения источника.

Проведем луч  $SA_1$ , идущий от источника под некоторым углом  $\alpha_1$  к линии  $OO_1$ , перпендикуляр-

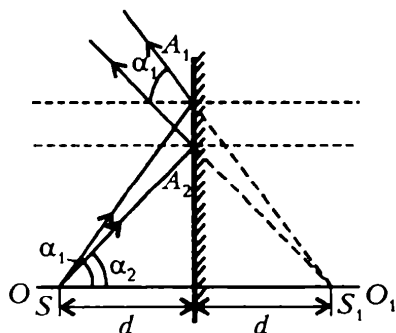


Рис. 1

ной плоскости зеркала (рис.1). Согласно закону отражения света, отраженный луч направлен под углом  $\alpha_1$  к нормали к зеркалу. Чтобы получить изображение источника, через точку  $S$  проведем еще один луч – под углом  $\alpha_2$  к  $OO_1$ , который пересечет поверхность зеркала в точке  $A_2$ , и построим второй отраженный луч. Продолжим оба отраженных луча за зеркало до их пересечения в точке  $S_1$ . Из построения видно, что треугольники  $SA_1S_1$  и  $SA_2S_1$  – равнобедренные, так что  $SA_1 = A_1S_1$  и  $SA_2 = A_2S_1$ . Следовательно, изображение  $S_1$  находится на таком же расстоянии  $d$  от зеркала, что и источник  $S$ . Полученное таким образом изображение в зеркале является кажущимся (мнимым). Вообще, термин «мнимое изображение» употребляется в том случае, когда его нельзя получить на экране.

**Задача 2.** Определите угол отклонения светового луча, прошедшего через призму с малым углом при вершине  $\theta$  и показателе преломления материала призмы  $n$ .

Пусть  $\alpha$  – угол падения луча  $OA$  на боковую поверхность призмы (рис.2),  $\beta$  – угол его преломления на первой границе раздела воздух – призма,  $\varphi$  – угол падения

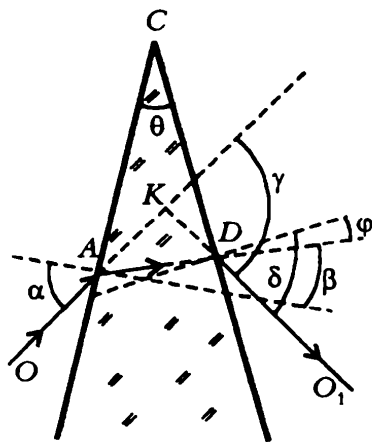


Рис. 2

луча на вторую границу раздела призма – воздух,  $\delta$  – угол преломления на этой границе,  $\gamma$  – искомый угол отклонения луча  $OA$  от своего первоначального направления. Используя закон преломления света и полагая все обсуждаемые углы малыми (так что  $\sin \alpha = \alpha$  и т.п.), получим

$$\frac{\alpha}{\beta} = n, \quad \frac{\varphi}{\delta} = \frac{1}{n}.$$

Угол  $\gamma$  – внешний угол треугольника  $AKD$ , поэтому

$$\gamma = \alpha - \beta + \delta - \varphi = \beta(n - 1) + \varphi(n - 1) = (n - 1)(\beta + \varphi).$$

Сумма углов треугольника  $ACD$  равна  $180^\circ$ , следовательно,

$$\theta + \frac{\pi}{2} - \beta + \frac{\pi}{2} - \varphi = \pi, \text{ или } \beta + \varphi = \theta.$$

Отсюда находим

$$\gamma = \theta(n - 1).$$

Используя это соотношение, можно сконструировать оптичес-

кую систему, состоящую из набора призм (в том числе усеченных), положенных основаниями друг на друга. Неограниченно увеличивая число таких призм, при одновременном уменьшении их высот, получаем оптический прибор, называемый линзой. Реальная линза представляет собой тело, ограниченное двумя сферическими (иногда цилиндрическими или еще более сложными) поверхностями. Линзу можно считать тонкой, если углы микропризм, ее составляющих, достаточно малы, т.е. если толщина линзы (вдоль оси) мала по сравнению с радиусами кривизны ее поверхностей. В тонкой линзе смещением луча, идущего под некоторым углом к главной оптической оси и проходящего через ее центр, можно пренебречь.

Линзы бывают положительные (собирающие) и отрицательные (рассеивающие). В случае положительной линзы луч, падающий на нее, после преломления отклоняется к главной оптической оси, а в случае отрицательной линзы – от главной оптической оси.

**Задача 3.** *Используя свойства тонких линз, получите формулу положительной линзы.*

Для решения этой задачи воспользуемся следующими свойствами:

1) Луч, идущий через оптический центр линзы, проходит ее насквозь не преломляясь.

2) Луч, идущий параллельно главной оптической оси линзы, после преломления в ней проходит через ее фокус. Таким образом, все лучи, параллельные главной оптической оси линзы, собираются в одной точке (фокусе), расположенной на этой оси. Плоскость, перпендикулярная главной оптической оси линзы и проходящая через ее фокус, называется фокальной плоскостью.

3) Лучи, проходящие через фокус линзы, выходят из нее пучком, параллельным главной оптической оси.

Пусть  $AB$  – предмет, расположенный на некотором расстоянии слева от собирающей линзы перпендикулярно ее главной оптической оси (рис.3). Построим его изображение в линзе.

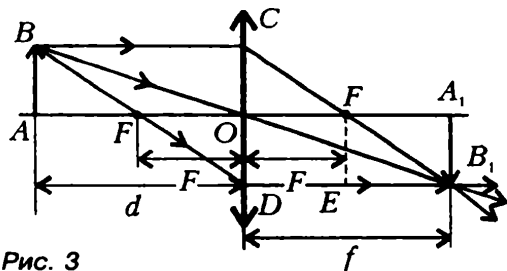


Рис. 3

Проведем луч  $BC$  параллельно главной оптической оси линзы, после преломления в линзе он пройдет через ее фокус  $F$  по пути  $CF$ . Луч  $BO$ , идущий через центр линзы, пройдет ее насквозь не преломляясь и пересечет

луч  $CF$  в точке  $B_1$ . Заметим, что этих двух лучей достаточно, чтобы получить изображение, даваемое линзой. Но можно провести еще один луч, проходящий через передний фокус линзы  $F$ , – после преломления в линзе он выйдет из нее параллельно главной оптической оси и тоже пройдет через точку  $B_1$ . Проведя через точку  $B_1$  перпендикуляр к главной оптической оси линзы, мы получим изображение  $A_1B_1$  предмета  $AB$  в линзе. Это изображение – действительное.

Обозначим через  $d$  расстояние от предмета до линзы, через  $f$  – расстояние от линзы до изображения и через  $F$  – фокусное расстояние линзы. Отношение поперечного размера изображения к поперечному размеру предмета называется линейным увеличением линзы  $\Gamma$ . В силу подобия треугольников  $AOB$  и  $A_1OB_1$ , а также треугольников  $B_1CD$  и  $B_1FE$  для увеличения  $\Gamma$  имеем

$$\Gamma = \frac{f}{d} \text{ и } \Gamma = \frac{f - F}{F},$$

откуда и получаем формулу тонкой положительной линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

**Задача 4.** С помощью тонкой собирающей линзы получено изображение трезубца  $BACGDE$ . Основание трезубца  $EDG$  лежит на главной оптической оси линзы,  $AB = AC$ . Отрезок  $DG$  изображается с увеличением  $\beta_1$ , отрезок  $ED$  – с увеличением  $\beta_2$ . С каким увеличением изображается отрезок  $AD$ ?

Пусть  $d$  – расстояние от центрального зубца трезубца до линзы,  $f$  – расстояние от линзы до его изображения (рис.4). Построим изображения зубцов  $BE$ ,  $AD$  и  $CG$ . Обозначим отрезки  $ED$  и  $DG$  через  $x$ , расстояния между изображениями зубцов  $A_1D_1$  и  $C_1G_1$  через  $y_1$ , а зубцов  $B_1E_1$  и  $A_1D_1$  – через  $y_2$ . Используя

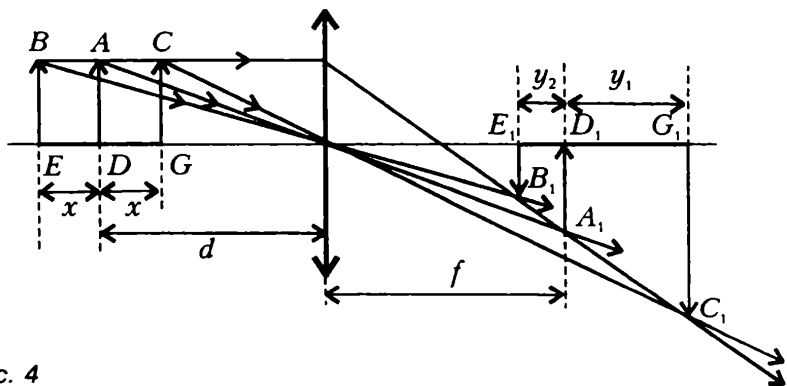


Рис. 4



результаты предыдущей задачи, для увеличения отрезка  $AD$  можно записать

$$\Gamma = \frac{F}{d - F},$$

где  $F$  – фокусное расстояние линзы. Отсюда

$$d = \frac{F(1 + \Gamma)}{\Gamma} \text{ и } f = F(1 + \Gamma).$$

Теперь запишем формулу линзы для зубцов  $CG$  и  $BE$ :

$$\frac{1}{d \mp x} + \frac{1}{f \pm y} = \frac{1}{F},$$

где верхний знак в знаменателях относится к зубцу  $CG$ , а нижний – к зубцу  $BE$ . После несложных преобразований получаем

$$\frac{xy_1}{F} = \frac{y_1}{\Gamma} - x\Gamma \text{ и } \frac{xy_2}{F} = -\left(\frac{y_2}{\Gamma} - x\Gamma\right).$$

Поскольку увеличения отрезков  $DG$  и  $DE$  равны  $\beta_1$  и  $\beta_2$  соответственно, используя полученные соотношения, легко найти выражение для искомого увеличения:

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2\beta_1\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}}.$$

**Задача 5.** Оптическая система состоит из рассеивающей линзы и плоского зеркала, расположенного в фокальной плоскости линзы перпендикулярно ее главной оптической оси (рис. 5). Предмет  $AB$  находится в фокальной плоскости перед линзой.

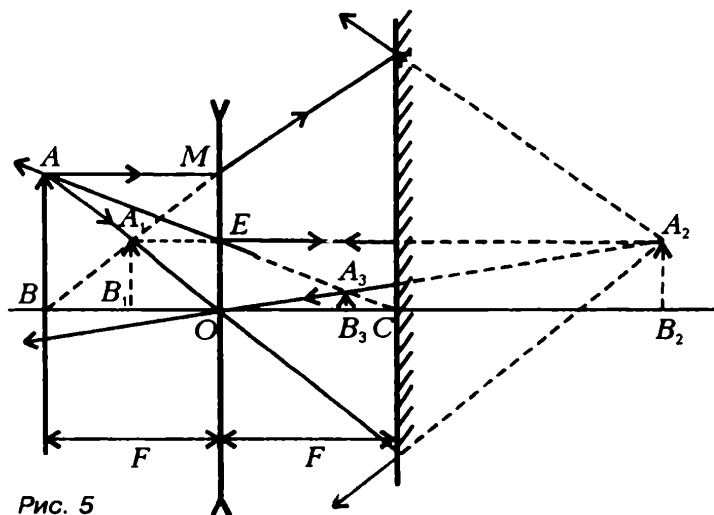


Рис. 5

Построением найдите положение изображения предмета, даваемого такой системой, и определите его увеличение.

Сначала построим изображение  $A_1B_1$ , даваемое линзой для предмета  $AB$ . Для этого пустим луч  $AO$  через центр линзы и луч  $AM$  параллельно главной оптической оси линзы. Изображение  $A_1B_1$  получается мнимым, уменьшенным и прямым. Считая  $A_1B_1$  предметом для зеркала, построим его изображение  $A_2B_2$ . После этого строим изображение, даваемое линзой для предмета  $A_2B_2$ . Изображение  $A_3B_3$  и есть искомое изображение, даваемое всей системой.

Из построения видно, то первое изображение  $A_1B_1$  расположено на расстоянии, равном половине фокусного расстояния, т.е.  $F/2$ , слева от линзы, при этом его увеличение равно  $1/2$ . Легко видеть, что  $A_2B_2 = A_1B_1$  и второе изображение расположено на расстоянии  $3F/2$  справа от зеркала и, следовательно, на расстоянии  $5F/2$  от линзы. Подобие треугольников  $EOC$  и  $A_3B_3C$  и треугольников  $A_2B_2O$  и  $A_3B_3O$  дает

$$\frac{A_3B_3}{AB/2} = \frac{B_3C}{F} \text{ и } \frac{A_3B_3}{AB/2} = \frac{F - B_3C}{5/2 F}.$$

Отсюда для искомого увеличения получаем

$$\Gamma = \frac{A_3B_3}{AB} = \frac{1}{7}.$$

**Задача 6.** Оптическая система, состоящая из положительной и отрицательной линз, расположенных на одной оптической оси на расстоянии  $b = 4$  см друг от друга (рис. 6), создает

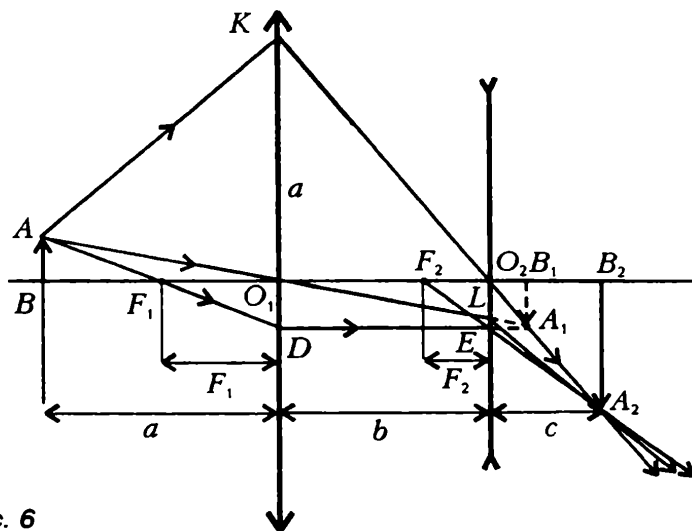


Рис. 6

действительное изображение предмета, находящегося на расстоянии  $a = 6$  см от собирающей линзы, с поперечным увеличением  $\Gamma = 4$ . Изображение получено на экране, отстоящем на  $c = 4$  см от рассеивающей линзы. Построением определите положения главных фокусов обеих линз и найдите их фокусные расстояния.

Пусть  $AB$  – предмет и  $A_2B_2$  – его изображение в оптической системе. Проведем луч  $AO_1$ , проходящий через центр первой линзы, до пересечения со второй. Этот луч, преломившись во второй линзе, пойдет в точку  $A_2$  по пути  $LA_2$ . Теперь проведем луч  $A_2O_2K$ , проходящий через центр второй линзы. Соединив точки  $A$  и  $K$ , мы построили траекторию луча  $AKO_2A_2$  и таким образом однозначно определили связь между предметом  $AB$  и его изображением  $A_2B_2$ .

Для нахождения фокуса первой линзы (точка  $F_1$ ) поступим следующим образом. Продолжим луч  $O_1L$  до пересечения с лучом  $O_2A_2$  в точке  $A_1$ , так что  $A_1B_1$  – промежуточное изображение предмета  $AB$ , даваемое первой линзой. Проведем луч  $DEA_1$  параллельно главной оптической оси до пересечения с первой линзой и соединим точки  $A$  и  $D$  прямой. Точка пересечения этой прямой с главной оптической осью и даст положение переднего фокуса  $F_1$  первой линзы.

Аналогично, проведя луч  $EA_2$  и продолжив его за точку  $E$  до пересечения с оптической осью, найдем точку  $F_2$  – положение переднего фокуса второй линзы.

Воспользовавшись решениями задач 3 и 5, для увеличений  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , даваемых линзами, сразу запишем

$$\Gamma_1 = \frac{b + O_2B_1}{a} = \frac{F_1}{a - F_1}, \quad \Gamma_2 = \frac{c}{O_2B_1} = \frac{c + F_2}{F_2}.$$

Увеличение системы линз равно произведению увеличений каждой линзы, т.е.

$$\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = \frac{b + O_2B_1}{a} \cdot \frac{c}{O_2B_1},$$

откуда

$$O_2B_1 = \frac{bc}{a\Gamma - c}.$$

Подставив  $O_2B_1$  в уравнения для увеличений  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , найдем фокусные расстояния линз:

$$F_1 = \frac{ab\Gamma}{\Gamma(a+b) - c} = \frac{8}{3} \text{ см}, \quad F_2 = \frac{bc}{a\Gamma - c - b} = 1 \text{ см}.$$

## Упражнения

1. Перпендикулярно главной оптической оси тонкой положительной линзы с фокусным расстоянием  $F$  расположено плоское зеркало (рис. 7). Эта оптическая система создает действительное изображение предмета  $A$ , находящегося между линзой и ее фокусом, с увеличением  $\Gamma = F/d$ , где  $d$  – расстояние от предмета до линзы. Найдите расстояние между линзой и зеркалом.

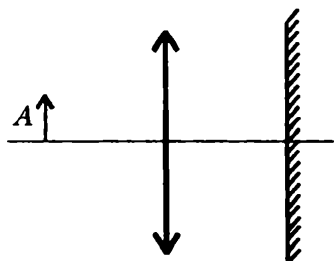


Рис. 7

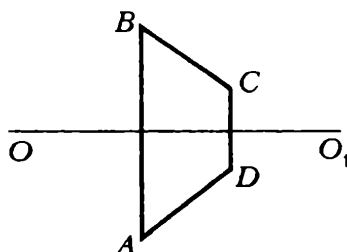


Рис. 8

2. Трапеция  $ABCD$  расположена так, что ее параллельные стороны перпендикулярны главной оптической оси  $OO_1$  (рис. 8). Линза создает действительное изображение трапеции в виде прямоугольника. Если повернуть трапецию на  $180^\circ$  вокруг стороны  $AB$ , то линза создает ее изображение в виде трапеции с теми же самыми углами. С каким увеличением изображается сторона  $AB$ ?

3. Оптическая система, состоящая из рассеивающей и собирающей тонких линз, расположенных на одной оптической оси на расстоянии  $b = 4$  см друг от друга, создает действительное изображение предмета, находящегося на расстоянии  $a = 6$  см от рассеивающей линзы, с поперечным увеличением  $\Gamma = 1/8$ . Изображение получено на экране, находящемся на расстоянии  $c = 3$  см от собирающей линзы. Построением определите положения главных фокусов обеих линз и найдите их фокусные расстояния.

Вопрос о том, что такое свет, волновал человечество еще со времен Аристотеля, Лукреция и Демокрита. По мере накопления фактов, касающихся природы света, возникали различные теории, которые в конечном итоге сводились к двум концепциям: корпускулярной и волновой. Убедительным доказательством волновой природы световых явлений стали экспериментальные работы по интерференции Т. Юнга (начало XIX в.).

Прежде чем перейти к самому опыту Юнга, рассмотрим вопрос о представлении света в виде бегущих волн. Любой волновой процесс характеризуется амплитудой волны  $A$ , частотой  $\omega$ , длиной волны  $\lambda$ , так что волну, бегущую вдоль какого-либо выбранного направления  $r$ , можно представить в виде

$$u = A \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \varphi \right).$$

Здесь  $u$  — колеблющаяся величина, частота  $\omega$  определяет ее изменение во времени в заданной точке пространства, величина  $2\pi/\lambda$  отвечает за изменение величины  $u$  вдоль направления распространения волны в фиксированные моменты времени,  $\varphi$  — некая постоянная величина, называемая начальной фазой колебаний.

При наложении двух (или нескольких) бегущих волн одинаковых частот может наблюдаться явление интерференции — усиление колебаний в одних точках пространства и ослабление в других. При этом интерференционная картина будет устойчивой, если за время наблюдения разность фаз колебаний от разных источников остается неизменной. Такие колебания называются когерентными. Именно в связи с требованием когерентности все интерференционные опыты со светом, как правило, проводятся не с двумя разными источниками, а с одним, свет от которого каким-либо образом разделяется на два потока.

Рассмотрим несколько конкретных задач на интерференцию света.

**Задача 1** (Опыт Юнга). Свет от точечного монохроматического источника  $S$  с длиной волны  $\lambda$  падает на экран  $M$ , в котором просверлены маленькие отверстия  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 1). На расстоянии  $L$  от экрана  $M$  перпендикулярно оси симметрии  $OO'$  расположен экран  $\mathcal{E}$ , на котором наблюдается интерференционная картина. Расстояние между отверстиями  $S_1$  и  $S_2$  равно  $d$ . Считая  $d \leq L$ , определите положение максимумов и минимумов интенсивности вдоль экрана  $\mathcal{E}$ , а также ширину интерференционных полос.

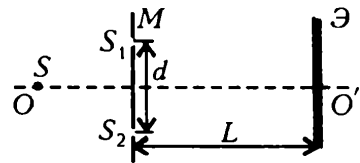


Рис. 1

Продрав два отверстия в экране  $M$ , мы создали два когерентных источника света  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 2). Согласно принципу Гюйгенса, эти отверстия можно рассматривать как вторичные источники, излучающие свет в виде двух монохроматических пучков. Интерференция возникает в той части экрана  $\mathcal{E}$ , где эти пучки перекрываются. В нашем случае этой областью является отрезок  $CD$ . Пусть  $P$  — точка наблюдения интерференции, расположенная на отрезке  $CD$  на расстоянии  $x$  от оси симметрии  $OO'$ , проходящей через середину отрезка  $S_1S_2$  перпендикулярно к нему и экрану  $\mathcal{E}$ , так что  $x = PK$ . Проведем в точку  $P$  из  $S_1$  и  $S_2$  лучи  $S_1P$  и  $S_2P$  и найдем длины оптических путей от вторичных источников:

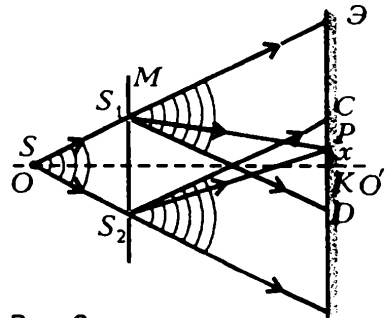


Рис. 2

$$l_1 = S_1P = \sqrt{\left(\frac{d}{2} - x\right)^2 + L^2}, \quad l_2 = S_2P = \sqrt{\left(\frac{d}{2} + x\right)^2 + L^2}.$$

Запишем уравнение бегущей волны, пришедшей в точку наблюдения  $P$  от каждого из источников:

$$u_1 = A_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} l_1 + \varphi_1\right), \quad u_2 = A_2 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} l_2 + \varphi_2\right).$$

В силу симметрии задачи относительно оси  $OO'$ , получаем  $A_1 = A_2 = A$  и  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ . Таким образом, наложение колебаний  $u_1$  и  $u_2$  дает суммарное колебание

$$u = u_1 + u_2 = 2A \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} (l_1 - l_2)\right) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda} (l_1 + l_2) + \varphi\right).$$

$$B = 2A \cos\left(\frac{\pi}{\lambda}(l_1 - l_2)\right),$$

для результирующего поля волны в точке  $P$  имеем

$$u = B \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda}(l_1 + l_2) + \varphi\right).$$

Реально на экране Э наблюдается интенсивность волнового поля, равная квадрату волнового поля, усредненному по времени, т.е.

$$2A^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}(l_1 - l_2)\right) = 2A^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\Delta l\right),$$

где  $\Delta l = l_1 - l_2$  называется разностью хода лучей  $S_1P$  и  $S_2P$ . Максимумы интенсивности будут наблюдаться, когда разность хода равна целому числу длин волн:

$$\frac{\pi}{\lambda}\Delta l_{\max} = k\pi, \text{ или } \Delta l_{\max} = k\lambda,$$

где  $k$  пробегает целые значения ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Соответственно, для минимумов разность хода равна нечетному числу полуволн:

$$\frac{\pi}{\lambda}\Delta l_{\min} = \frac{2k-1}{2}\pi, \text{ или } \Delta l_{\min} = \frac{2k-1}{2}\lambda.$$

Из выражений для  $l_1$  и  $l_2$  имеем

$$l_1^2 - l_2^2 = 2xd, \text{ или } l_1 - l_2 = \frac{2xd}{l_1 + l_2}.$$

Принимая во внимание, что  $d \ll L$ , можно положить

$$l_1 + l_2 = 2L$$

и, следовательно,

$$\Delta l = \frac{2xd}{2L} = \frac{xd}{L}.$$

Используя условия для минимумов и максимумов интенсивности, получим

$$x_{\max} = \frac{\lambda L}{d}k, \quad x_{\min} = \frac{\lambda L}{2d}(2k-1), \quad k = 1, 2, \dots$$

Ширина интерференционной полосы равна расстоянию между двумя минимумами (или максимумами):

$$\Delta = \frac{\lambda L}{d} = \frac{\lambda}{d/L} = \frac{\lambda}{\psi},$$

где  $\psi$  — угол, под которым видны источники  $S_1$  и  $S_2$  из центра экрана Э (точка К). В самом деле,

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{\psi}{2} = \frac{d}{2L},$$

откуда

$$\psi = \frac{d}{L}, \text{ и } \Delta = \frac{\lambda}{\psi}.$$

Эти соотношения имеют большое значение и используются практически во всех экспериментах по интерференции.

**Задача 2.** При нормальном падении света на бипризму Френеля (рис. 3) пучки монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ , преломленные каждой из половинок бипризмы, интерферируют между собой. На каком максимальном расстоянии  $L$  от бипризмы еще будет наблюдаться интерференционная картина? Определите также ширину интерференционных полос. Рас-

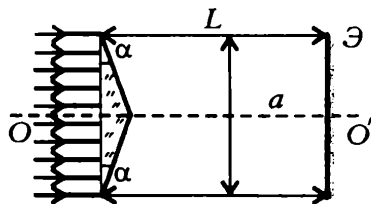


Рис. 3

стояние между вершинами бипризмы  $a = 4 \text{ см}$ , показатель преломления материала бипризмы  $n = 1,4$ , преломляющий угол  $\alpha = 10^{-3} \text{ рад}$ . Считать угол  $\alpha$  малым, так что  $\alpha = \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ .

Рассмотрим луч света, нормально падающий на бипризму. При условии малости угла  $\alpha$  для угла отклонения светового луча  $\theta$  имеем

$$\theta = \alpha(n - 1).$$

Следовательно, две половинки бипризмы создают два параллельных когерентных пучка плоских световых волн, идущих под равными углами  $\theta$  к линии  $OO'$  (рис. 4). Точка В — крайняя, дальше которой пучки света не перекрываются, поэтому интерференция будет наблюдаться на экране, расположенном левее точки В. Из геометрии легко находим искомое расстояние:

$$L = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \theta} = \frac{a}{2\theta} = \frac{a}{2\alpha(n - 1)} = 50 \text{ м}.$$

Ширину интерференционной полосы определим из последнего соотношения задачи 1, где  $\psi$  — угловой размер источников. В нашем случае источники мнимые и расположены на очень большом расстоянии от экрана Э. Их угловой размер  $\psi = 2\theta$ .



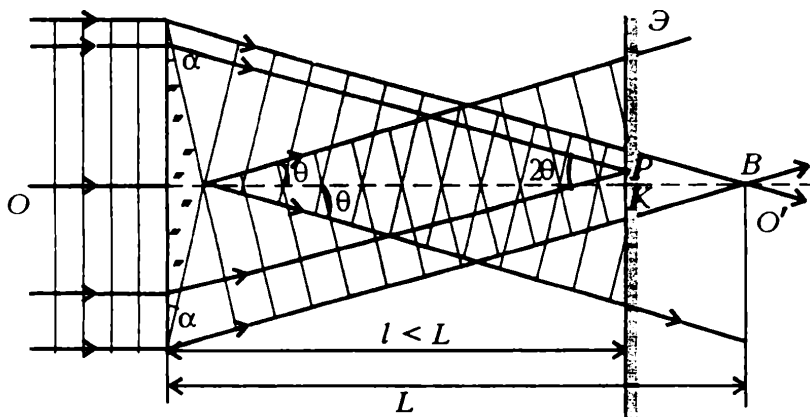


Рис. 4

Тогда для ширины интерференционных полос получим

$$\Delta = \frac{\lambda}{\psi} = \frac{\lambda}{2\theta} = \frac{\lambda}{2\alpha(n-1)} = 0,075 \text{ см.}$$

**Задача 3.** Точечный источник монохроматического света  $S$  с длиной волны  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$  расположен между двумя неподвижными плоскопараллельными зеркалами, расстояние между которыми  $b = 3 \text{ см}$  (рис. 5). На удаленном расстоянии  $L = 1 \text{ м}$  от источника расположен экран  $\mathcal{E}_1$ , на котором наблюдается интерференционная картина, создаваемая двумя пучками света, отраженными от зеркал.

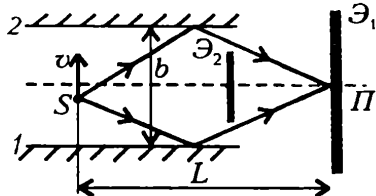


Рис. 5

Прямой пучок света от источника перекрывается экраном  $\mathcal{E}_2$ . В плоскости экрана  $\mathcal{E}_1$  симметрично относительно зеркал расположен приемник  $\Pi$ , сигнал которого пропорционален интенсивности падающего на него света. Размер приемника мал по сравнению с шириной интерференционных полос на экране  $\mathcal{E}_1$ . Учитывая только однократные отражения света от зеркал, определите частоту переменного сигнала, регистрируемого приемником, который возникает при движении источника в направлении, перпендикулярном зеркалам, со скоростью  $v = 0,1 \text{ мм/с}$ . Указание: при  $\beta \ll 1$  считать  $\sqrt{1+\beta} = 1 + \beta/2$ .

В этой задаче речь идет об интерференции от двух мнимых источников  $S_1$  и  $S_2$ , даваемых источником  $S$  в зеркалах 1 и 2 соответственно (рис. 6). Если  $OO'$  — ось симметрии экспериментальной установки,  $\Delta x$  — расстояние от источника  $S$  до этой оси,

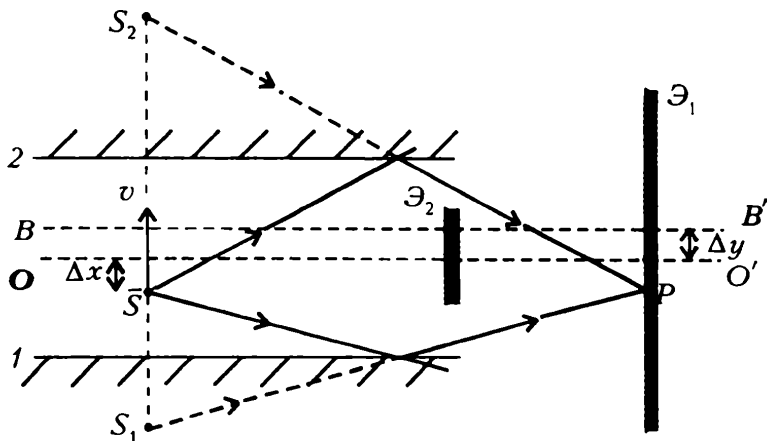


Рис. 6

то легко видеть, что расстояние между  $S_1$  и  $S_2$  равно

$$S_1 S_2 = 2 \left( \frac{b}{2} - \Delta x \right) + 2 \left( \frac{b}{2} + \Delta x \right) = 2b.$$

Считая скорость перемещения источника  $S$  много меньшей скорости света и воспользовавшись формулой для ширины интерференционных полос, получим

$$\Delta y = \frac{\lambda}{2b/L} = \frac{\lambda L}{2b}.$$

В свою очередь,  $\Delta y$  — это расстояние от оси  $BB'$ , проходящей параллельно оси  $OO'$  через середину отрезка  $S_1 S_2$ , т.е.

$$\Delta y = b - \Delta x - 2 \left( \frac{b}{2} - \Delta x \right) = b - \Delta x - b + 2\Delta x = \Delta x = v\Delta t.$$

Таким образом,

$$v\Delta t = \frac{\lambda L}{2b},$$

где  $\Delta t$  — период колебаний интенсивности в точке  $P$ . Частота изменения интенсивности сигнала в точке приема равна

$$f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{2vb}{\lambda L} = 10 \text{ Гц}.$$

**Задача 4.** В целях борьбы с потерями при отражении света от поверхности оптического прибора (линзы) используется метод просветления оптики, суть которого заключается в том, что на поверхность стекла линзы напыляется слой постороннего вещества с таким показателем преломления и такой

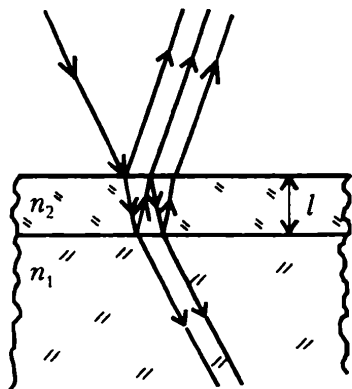


Рис. 7

толщины, чтобы минимизировать отраженные от линзы волны. Оцените толщину нанесенного покрытия, если используется стеклянная линза с показателем преломления  $n_1 = 4/3$ , а показатель преломления напыляемого вещества  $n_2 = 5/4$ . Фотографирование объекта ведется на длине волны  $\lambda = 600$  нм.

Пусть на линзу перпендикулярно ее поверхности падает плоская волна (рис.7). Толщину  $l$  напыленного вещества требуется подобрать так, что-

бы лучи, отраженные от верхней и нижней границ этого слоя, взаимно погасились благодаря интерференции. (При этом показатель преломления выбирается таким, чтобы интенсивности этих лучей были близки между собой.) При учете отражений только первого порядка в произвольной точке, расположенной на некотором расстоянии от линзы, имеет место интерференция двух лучей с разностью хода

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda/n_2} l + \frac{2\pi}{\lambda/n_2} l = \frac{4\pi l}{\lambda} n_2.$$

Используя выражение для минимизации отраженных волн (см. задачу 1), имеем

$$\frac{4\pi l}{\lambda} n_2 = (2k - 1)\pi, \text{ где } k = 1, 2, \dots$$

Тогда для минимальной толщины слоя ( $k = 1$ ) получаем

$$l_{\min} = \frac{\lambda}{4n_2} = 120 \text{ нм}.$$

### Упражнения

1. Интерферометр Рэлея (рис.8) используется для точного измерения показателя преломления газов. Для этого на пути одного из интерферирующих лучей ставится кювета  $\Gamma$  прямоугольной формы и длиной  $L = 10$  см с исследуемым газом, а на пути другого — стеклянный

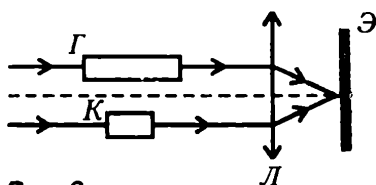


Рис. 8

компенсатор  $K$ , с помощью которого добиваются, чтобы в центральном максимуме разность хода между интерферирующими лучами равнялась нулю. Чему равен показатель преломления газообразного азота, если после замены в кювете воздуха на азот интерфе-

ренционная картина в плоскости наблюдения сместилась ровно на одну полосу в сторону, что соответствовало увеличению показателя преломления? Показатель преломления воздуха  $n_a = 1,000292$ . Измерения проводились на длине волны света  $\lambda = 500$  нм.

2. На рисунке 9 изображена схема интерференционного опыта Ллойда. Точечный источник света  $S$  расположен на расстоянии  $b = 20$  см от плоского зеркала  $З$  на высоте  $a = 10$  см над плоскостью зеркала. Длина зеркала  $d = 10$  см. На расстоянии  $L = 1$  м от источника расположен экран  $Э$ . Определите вертикальный размер интерференционной картины на экране.

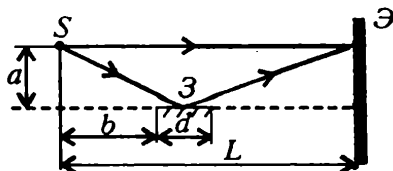


Рис. 9

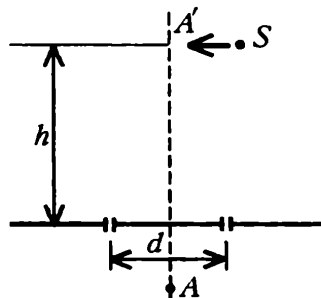


Рис. 10

3. Точечный источник света  $S$  равномерно движется параллельно плоскости, в которой имеются два маленьких отверстия на расстоянии  $d$  друг от друга (рис. 10). Расстояние от источника до плоскости  $h$ . Приемник  $A$ , расположенный на оси системы, регистрирует периодически изменяющуюся интенсивность света. Определите скорость движения источника, если частота колебаний интенсивности  $f = 15$  Гц, длина волны  $\lambda = 600$  нм,  $d = 2$  мм,  $h = 1$  м. Во время измерения источник движется вблизи оси системы  $AA'$ .

4. С целью уменьшения доли отраженного света от поверхности стекла на него наносят тонкую пленку, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла (просветление оптики). Пучок белого света (длина волн от 400 до 700 нм) падает нормально на нанесенную на стекло пленку. Показатель преломления пленки  $4/3$ , ее толщина 600 нм. На каких длинах волн отраженный свет максимально ослабляется?

Вспомним некоторые определения, явления и закономерности ядерной физики.

Когда говорят о ядре, то подразумевают центральную часть атома, в которой сосредоточена практически вся масса атома и его положительный заряд. Атомное ядро любого элемента состоит из протонов (числом  $Z$ ) и нейтронов (числом  $N$ ), называемых нуклонами. Заряд ядра равен величине  $Ze$ , где  $Z$  – порядковый номер химического элемента в таблице Менделеева, соответствующий числу протонов в ядре, а  $e$  – заряд протона, равный по абсолютной величине заряду электрона. Число нуклонов в ядре  $A = Z + N$  называют массовым числом. Отдельному протону и нейтрону приписывается массовое число, равное единице, а электрону – равное нулю. Массу ядер и элементарных частиц принято выражать в особых единицах – атомных единицах массы:  $1 \text{ а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ .

Ядра с одинаковыми  $Z$ , но разными  $A$ , т.е. ядра с разным числом нейтронов  $N = A - Z$ , называются изотопами. Ядро химического элемента обозначается  ${}_Z^AX$ , где  $X$  – символ этого элемента.

Некоторые тяжелые ядра (изотопы урана, тория, радия) самопроизвольно распадаются с образованием новых ядер и выделением  $\alpha$ -частиц,  $\beta$ -частиц и  $\gamma$ -квантов. Это свойство называется естественной радиоактивностью. Существует также искусственная радиоактивность изотопов, которая возникает в результате ядерных реакций. Изменение числа радиоактивных ядер подчиняется закону радиоактивного распада

$$N = N_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где  $N_0$  – число ядер в момент времени  $t = 0$ ,  $N$  – оставшееся число радиоактивных ядер в момент времени  $t$ ,  $T$  – период полураспада (время, в течение которого распадается половина ядер). При этом радиоактивный распад не связан с такими внешними условиями, как температура или давление.

Нуклоны в ядрах находятся в состояниях, существенно отличающихся от их свободных состояний. Как показывают измерения, масса покоя ядра всегда меньше суммарной массы нуклонов, составляющих ядро. Разность масс  $\Delta m$  между массой покоя свободных нуклонов и массой покоя ядра называют дефектом масс:

$$\Delta m = (Zm_p + Nm_n) - M_{\text{я}}.$$

Согласно соотношению Эйнштейна для энергии тела и его массы, дефект масс определяет энергию связи ядра:

$$\Delta E = \Delta mc^2.$$

Энергия связи ядра – эта та работа, которую нужно совершить, чтобы расщепить ядро на составляющие его нуклоны, не сообщая им кинетической энергии. Из закона сохранения энергии следует, что при образовании ядра должна выделяться такая же энергия.

Взаимодействие атомного ядра с другим ядром или с элементарной частицей, при котором происходит превращение ядер, называют ядерной реакцией. При ядерных реакциях выполняются законы сохранения энергии, импульса, электрического заряда.

Характерно, что одни ядерные реакции идут с поглощением энергии, а другие – с ее выделением. Если известно, например, что в результате реакции выделяется энергия  $\Delta E$ , связанная с дефектом масс, то выделяется она в виде кинетической энергии продуктов реакции. Если же суммарная масса ядер после реакции больше, чем до нее, то реакция обязательно идет с поглощением энергии. Так происходит, скажем, при соударении налетающей частицы с покоящимся ядром. Заметим, что при этом энергия частицы не может равняться поглощаемой энергии  $\Delta E$ , а должна быть обязательно больше. Действительно, импульс и кинетическая энергия системы частица – ядро до реакции не равны нулю, следовательно, и после реакции они также не равны нулю. Минимальная кинетическая энергия системы после реакции должна равняться кинетической энергии центра масс. Таким образом, существует так называемая пороговая энергия налетающей частицы, при которой может идти реакция. Эта энергия равна сумме энергии реакции и энергии движения центра масс данной системы:

$$E_{\text{п}} = \Delta E + E_{\text{цм}}.$$

А теперь обратимся к решению конкретных задач.

**Задача 1.** Образовавшееся в результате ядерной реакции неподвижное ядро изотопа калия  ${}^{40}_{19}\text{K}$  испускает  $\gamma$ -квант с энергией  $E_\gamma = 9,4 \text{ кэВ}$ . Определите кинетическую энергию ядра после испускания кванта. Одной атомной единице массы соответствует энергия  $931,5 \text{ МэВ}$ .

По условию задана энергия  $\gamma$ -кванта, следовательно, задан и его импульс:

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c},$$

где  $c$  – скорость света. Система ядро – квант является замкнутой. В соответствии с законом сохранения импульса,

$$M_\text{я} v = \frac{E_\gamma}{c},$$

где  $M_\text{я}$  – масса ядра калия, определяемая массовым числом  $A = 40$ . Отсюда находим скорость ядра:

$$v = \frac{E_\gamma}{M_\text{я} c}$$

и его кинетическую энергию:

$$E_k = \frac{M_\text{я} v^2}{2} = \frac{E_\gamma^2}{2M_\text{я} c^2} = \frac{(9,4 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 40 \cdot 931,5 \cdot 10^6} \text{ эВ} \approx 10^{-3} \text{ эВ}.$$

**Задача 2.** Термоядерная реакция  ${}^2_1\text{H} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_1\text{p}$  идет с выделением энергии  $E_1 = 18,4 \text{ МэВ}$  (кинетическая энергия образовавшихся частиц на величину  $E_1$  больше кинетической энергии исходных). Какая энергия  $E_2$  выделится в реакции  ${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2{}^1_1\text{p}$ , если дефект масс ядра  ${}^3_2\text{He}$  на  $\Delta m = 0,006 \text{ а.е.м.}$  больше, чем у ядра  ${}^2_1\text{H}$ ?

Выражая массы ядер, входящих в реакцию, через дефект масс и массы свободных нуклонов, напомним закон сохранения энергии для первой реакции:

$$\left( m_p + m_n - \Delta m_{{}^2_1\text{H}} \right) + \left( 2m_p + m_n - \Delta m_{{}^3_2\text{He}} \right) = M_{{}^4_2\text{He}} + m_p + \frac{E_1}{c^2}.$$

Аналогично, для второй реакции:

$$2 \left( m_p + m_n - \Delta m_{{}^3_2\text{He}} \right) = M_{{}^4_2\text{He}} + 2m_p + \frac{E_2}{c^2}.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим

$$-\Delta m_{2\text{H}} + \Delta m_{3\text{He}} = \Delta m = \frac{E_1 - E_2}{c^2}.$$

Отсюда энергия, выделившаяся во второй реакции, будет равна

$$E_2 = E_1 - \Delta m c^2 = 18,4 \text{ МэВ} - 0,006 \cdot 931,5 \text{ МэВ} = 12,8 \text{ МэВ}.$$

**Задача 3.** При слиянии протона ( ${}^1_1\text{H}$ ) и ядра трития ( ${}^3_1\text{H}$ ) образуется  $\alpha$ -частица ( ${}^4_2\text{He}$ ) и  $\gamma$ -квант:  ${}^1_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + \gamma$ . Определите, какую энергию уносит  $\gamma$ -квант в этой реакции, если кинетическими энергиями ядер  ${}^1_1\text{H}$ ,  ${}^3_1\text{H}$  и  ${}^4_2\text{He}$  в ней можно пренебречь. Известно, что дефект масс ядра  ${}^4_2\text{He}$  составляет  $\Delta m_\alpha = 0,0304 \text{ а.е.м.}$ , а кинетическая энергия частиц, образующихся в реакции  ${}^3_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2{}^1_0\text{n}$ , на величину  $E = 11,3 \text{ МэВ}$  больше кинетической энергии исходных частиц.

Аналогично предыдущей задаче, напомним закон сохранения энергии для первой реакции:

$$m_p + \left( m_p + 2m_n - \Delta m_{3\text{H}} \right) = \left( 2m_p + 2m_n - \Delta m_\alpha \right) + \frac{E_\gamma}{c^2},$$

или

$$-\Delta m_{3\text{H}} = -\Delta m_\alpha + \frac{E_\gamma}{c^2} \text{H}.$$

Так же для второй реакции:

$$2 \left( m_p + 2m_n - \Delta m_{3\text{H}} \right) = \left( 2m_p + 2m_n - \Delta m_\alpha \right) + 2m_n + \frac{E}{c^2},$$

или

$$-2\Delta m_{3\text{H}} = -\Delta m_\alpha + \frac{E}{c^2}.$$

Исключая из уравнений  $\Delta m_{3\text{H}}$ , получим

$$E_\gamma = \frac{E + \Delta m_\alpha c^2}{2} \approx 19,8 \text{ МэВ}.$$

**Задача 4.** Ядра дейтерия  $\text{D}({}^2_1\text{H})$  и трития  $\text{T}({}^3_1\text{H})$  могут вступить в реакцию  $\text{D} + \text{T} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$ , в результате которой образуются нейтрон и  $\alpha$ -частица ( ${}^4_2\text{He}$ ). При каждой такой реакции выделяется энергия  $E = 17,6 \text{ МэВ}$ . Определите, какую энергию уносит нейтрон и какую  $\alpha$ -частица. Кинетические



энергии, которыми обладали ядра до реакции, пренебрежимо малы.

Поскольку до реакции импульс и энергия системы были равны нулю, образующиеся в результате реакции частицы разлетаются в противоположные стороны с одинаковыми по величине импульсами (закон сохранения импульса):

$$p_n = \sqrt{2m_n E_n} = p_\alpha = \sqrt{2m_\alpha E_\alpha}.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$E = E_n + E_\alpha.$$

Решая совместно эти уравнения, получим

$$E_\alpha = \frac{m_n}{m_\alpha + m_n} E \approx 3,5 \text{ МэВ},$$

$$E_n = \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_n} E \approx 14,1 \text{ МэВ}.$$

**Задача 5.** Ядерная реакция  ${}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{p}$  может идти, если налетающие на неподвижные ядра азота  $\alpha$ -частицы имеют энергию, превышающую пороговую энергию  $E_n = 14,5 \text{ МэВ}$ . На сколько энергия  $\alpha$ -частиц должна быть больше пороговой, чтобы кинетическая энергия образующихся при реакции протонов была равна нулю?

В этой задаче реакция идет с поглощением энергии. По условию задана пороговая энергия налетающих  $\alpha$ -частиц, т.е. минимальная энергия частиц, при которой реакция вообще может идти:

$$E_n = \frac{m_\alpha v_{\alpha \min}^2}{2}.$$

С другой стороны, она равна сумме энергии, поглощаемой во время реакции, и кинетической энергии центра масс системы:

$$E_n = \Delta E + E_{\text{цм}}.$$

Из закона сохранения импульса найдем скорость центра масс:

$$v_{\text{цм}} = \frac{m_\alpha v_{\alpha \min}}{m_\alpha + m_N},$$

откуда

$$E_{\text{цм}} = \frac{(m_\alpha + m_N) v_{\text{цм}}^2}{2} = \frac{(m_\alpha v_{\alpha \min})^2}{2(m_\alpha + m_N)}.$$

Тогда энергия, поглощенная в реакции, равна

$$\Delta E = E_n - \frac{(m_\alpha v_{\alpha \min})^2}{2(m_\alpha + m_N)} = E_n \frac{m_N}{m_\alpha + m_N} = \frac{14}{18} E_n.$$

Пусть теперь энергия  $\alpha$ -частиц больше пороговой, но кинетическая энергия образовавшихся протонов равна нулю. В этом случае законы сохранения энергии и импульса имеют вид

$$E_\alpha = \Delta E + \frac{m_O v_O^2}{2}, \quad m_\alpha v_\alpha = m_O v_O,$$

где  $m_O$ ,  $v_O$  – масса и скорость ядра кислорода. Отсюда найдем энергию налетающей  $\alpha$ -частицы:

$$E_\alpha = \frac{m_O}{m_O - m_\alpha} \Delta E = \frac{17}{13} \Delta E = \frac{119}{117} E_n.$$

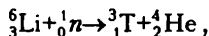
Следовательно, энергия  $\alpha$ -частицы больше пороговой на величину

$$E_\alpha - E_n = \frac{2}{117} E_n \approx 250 \text{ кэВ}.$$

### Упражнения

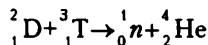
1. Какая доля радиоактивных ядер с периодом полураспада  $T = 71,3$  дня распадается за время, равное  $2/3T$  и  $4/3T$ ?

2. При захвате нейтрона ядром  ${}^6_3\text{Li}$  происходит ядерная реакция



в которой выделяется энергия  $\Delta E = 4,8$  МэВ. Найдите распределение энергии между продуктами реакции (ядром трития и  $\alpha$ -частицей), считая кинетическую энергию исходных частиц пренебрежимо малой.

3. Реакцию синтеза дейтерия и трития



изучают, направляя ускоренные до энергии  $E_D = 2$  МэВ ионы дейтерия на тритиевую мишень. Детектор регистрирует нейтроны, вылетающие перпендикулярно к направлению пучка дейтронов. Определите энергию регистрируемых нейтронов, если в реакции выделяется энергия  $\Delta E = 17,6$  МэВ.

4. В ядерной реакции образуется медленно движущаяся по сравнению со скоростью света  $\alpha$ -частица и  $\gamma$ -квант с энергией  $E_\gamma = 19,7$  МэВ. Пренебрегая скоростями вступающих в реакцию ядер, найдите скорость образовавшейся  $\alpha$ -частицы. Энергию покоя  $\alpha$ -частицы считать равной  $E_\alpha = m_\alpha c^2 = 3730$  МэВ.

ЧАСТЬ I. МАТЕРИАЛЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ  
ПО ФИЗИКЕ (ОКОНЧАНИЕ)

ГЛАВА 5. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

5.1.  $x = 0,03 \sin(10t + \pi/4)$ . 5.2.  $v_{\text{ср}} = 2v_m / \pi = 6 \text{ м/с}$ .

5.3.  $t = 3 \text{ с}$ . 5.4.  $v = -10,9 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$ ;  $a = -19,7 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$ .

5.5.  $v_{2m} = 6 \text{ м/с}$ . 5.6. В 9 раз. 5.7.  $l_1 = 72 \text{ см}$ ;  $l_2 = 50 \text{ см}$ .

5.8.  $\Delta l = 25 \text{ мм}$ . 5.9. Увеличится. 5.10.  $F_{\text{max}} = 80 \text{ мН}$ .

5.11.  $k = 250 \text{ Н/м}$ . 5.12.  $t = 25 \text{ мс}$ . 5.13.  $\alpha_m = \arccos \left( 1 - \frac{2v^2}{g^2 T^2} \right) = 60^\circ$ .

5.14.  $T = 2\pi A(M + m)/(mv) = 1,3 \text{ с}$ . 5.15.  $T = \pi \sqrt{m/k}$ .

5.16.  $x = \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2hk}{mg}} = 10 \text{ см}$ . 5.17.  $v_m = \sqrt{m/k} g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ .

5.18.  $m = kA/g$ . 5.19.  $v_{\text{min}} = 2\pi v l = 1,26 \text{ м/с}$ .

5.20.  $\mu \geq 2\pi v_m / (Tg) = 0,3$ . 5.21.  $T = 2\pi \sqrt{2R/g}$ .

5.22.  $T = 2\pi \sqrt{(M + m)R/(mg)}$ . 5.23.  $m = v_m \sqrt{kM/g}$ .

5.24.  $v_1 = v/\sqrt{2}$ . 5.25.  $T = 2\pi(b/L)\sqrt{m/k}$ .

5.26. 1)  $\Delta l = 3mg/(2k)$ ; 2)  $T = 3\pi \sqrt{m/k}$ . 5.27.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l(\rho_1 + \rho_2)}{2g|\rho_1 - \rho_2|}}$ .

5.28.  $\omega = \sqrt{vRT/(mL^2)}$ .

5.29. 1)  $b = -\frac{LF}{2L + F} = -0,45F$ ; 2)  $v_{\text{н3}} = 0,1A \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

5.30.  $\sigma_x = 2\varepsilon_0(1 - \alpha)^2 mg/(\alpha^2 q)$ . 5.31.  $x_m = IB L \tau / \sqrt{2mk}$ .

5.32.  $T = 4\pi R \sqrt{\pi \varepsilon_0 m R} / q$ . 5.33.  $a = 4\pi^2 v^2 A / \lambda^2 = 350 \text{ м/с}^2$ .

5.34.  $v = (\lambda v \sin \alpha) / \sin \beta = 2,2 \text{ км/с}$ .

- 5.35. Пусть  $C$  – емкость человека,  $U = 220$  В – напряжение сети переменного тока частотой  $\omega = 2\pi \cdot 50$  с<sup>-1</sup>. Тогда ток равен  $I = C\Delta U/\Delta t \sim C\omega U$ . Емкость человека можно оценить, например, как емкость шара радиусом  $R$  той же массы  $m$  и плотности  $\rho$ , что и у человека:  $C = 4\pi\epsilon_0 R \sim 4\pi\epsilon_0 \sqrt{m/\rho} \sim 3 \cdot 10^{-11}$  Ф для  $m \sim 60$  кг и  $\rho \sim 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Для искомого тока получаем  $I \sim C\omega U \sim 2$  мкА.
- 5.36.  $I_3 = 2(bI_1 - cI_2)/(2a + b + c)$ ; *примечание*: здесь учтено, что потоки, пронизывающие части контура 3, направлены навстречу друг другу.
- 5.37.  $I_m = \sqrt{2} U_1 / (3R) = 0,028$  А.    5.38.  $I = U_0 \sqrt{C/(2L)} = 10^{-2}$  А.
- 5.39.  $I_m = Q/\sqrt{2LC}$ .    5.40.  $I_{m1} = \frac{Q}{C} \sqrt{\frac{L_2}{L_1} \frac{C}{L_1 + L_2}}$ ;  $I_{m2} = \frac{Q}{C} \sqrt{\frac{L_1}{L_2} \frac{C}{L_1 + L_2}}$ .
- 5.41.  $I_m = U\sqrt{C/L}$ .    5.42.  $x(t) = (v_0/\omega)\sin\omega t$ ,  $\omega = Bl/\sqrt{mL}$ .
- 5.43. Либо ноль, либо  $2\epsilon$ .
- 5.44. 1)  $U_{m1} = I_0 \sqrt{(L_1 + L_2)/C}$ ; 2)  $U_{m2} = I_0 (L_1 + L_2) / \sqrt{(\mu L_1 + L_2)C}$ .
- 5.45.  $I_m = \frac{Q}{2} \sqrt{\frac{d}{\epsilon_0 SL}}$ .
- 5.46. а)  $T = 2\pi \sqrt{CL_1 L_2 / (L_1 + L_2)}$ ;  
б)  $I_{m1} = U \sqrt{L_2 C / (L_1 (L_1 + L_2))}$ ,  $I_{m2} = U \sqrt{L_1 C / (L_2 (L_1 + L_2))}$ .
- 5.47.  $I_m = 2Q/\sqrt{5LC}$ .
- 5.48. При разомкнутом ключе оба полупериода ток идет последовательно через две лампочки, а при замыкании ключа оба полупериода ток идет через один диод и одну лампочку.
- 5.49.  $P = 5U^2/(3R) = 16,1$  Вт.
- 5.50. Подключение конденсатора к диоду позволяет переменному току проходить через лампочку в течение полупериода, неиспользуемого ранее.
- 5.51.  $Q = C\epsilon_0^2/2$ .    5.52.  $I_m = U\sqrt{C/(2L)}$ .
- 5.53. 1)  $Q = \frac{L\epsilon^2}{2(r + RR_1/(R + R_1))^2} = 0,6$  Дж; 2) да, увеличится.
- 5.54.  $W \sim C$ ;  $q_m = C\epsilon = 1,5 \cdot 10^{-9}$  Кл;  $\omega = 1/\sqrt{LC} = 10^4$  с<sup>-1</sup>.
- 5.55.  $U = 0$ ;  $I_m = I_0 \sqrt{1 + CR^2/L}$ .

- 5.56.  $Q = U_0^2 (C + L/R^2) / 2 = 4 \cdot 10^{-6}$  Дж. 5.57.  $\lambda = 2\pi c q_m / I_m = 1884$  м, где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с — скорость света.
- 5.58. От  $\lambda_1 = c/v_1 = 4,29$  м до  $\lambda_2 = \lambda_1 \sqrt{C_2/C_1} = 21,5$  м, где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с — скорость света.
- 5.59.  $R = rU_2 / (kU_1 - U_2) = 1300$  Ом.
- 5.60.  $N_2 = N_1 (U^2 + PR) / (U_1 U) = 72$ .

## ГЛАВА 6. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

### СВЕТОВЫЕ КВАНТЫ

- 6.1.  $n = P\lambda / (hc) = 6 \cdot 10^{20} \text{ с}^{-1}$ . 6.2.  $N = W\lambda / (hc) = 3 \cdot 10^{13}$ .
- 6.3.  $N = \eta P\lambda / (hc) = 10^{19} \text{ с}^{-1}$ .
- 6.4.  $q_{\max} = 3\epsilon_0 S(h\nu - A + eU_0) / (ed)$  при  $h\nu > A$ .
- 6.5.  $A = hc/\lambda - eU = 3,2 \cdot 10^{-19}$  Дж = 2 эВ, где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с — скорость света.
- 6.6.  $h = e(U_2 - U_1) / (c/\lambda_2 - v_1) = 7 \cdot 10^{-34}$  Дж·с.
- 6.7.  $N = 4\pi\epsilon_0 hcr(\lambda_1 - \lambda_3) / (\lambda_1 \lambda_2 e^2) = 4,3 \cdot 10^6$ .
- 6.8.  $N_s / N_\phi = Ihc / (Pe\lambda) = 0,02$ . 6.9.  $I = eP\lambda / (hc) = 2$  мА.
- 6.10.  $D = d + 4L\sqrt{(hc/\lambda - A) / (eU)} = 1,3$  мм.
- 6.11.  $p_{\max} = \sqrt{2m_e(hc/\lambda - A)} = 8 \cdot 10^{-20}$  кг·м/с.
- 6.12.  $\lambda_0 = (\beta - \alpha)hc / ((\beta - 1)A) = 0,33$  мкм.
- 6.13.  $p_s - p_\phi = 1,65 \cdot 10^{-25}$  кг·м/с  $\leq p_{\text{ш}} \leq p_s + p_\phi = 1,7 \cdot 10^{-25}$  кг·м/с.
- 6.14.  $\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{p}{\rho} \sqrt{\frac{M}{2EN_A}} = 9 \cdot 10^{-8}$  см/с, где  $M = 108$  г/моль — молярная масса серебра,  $N_A = 6 \cdot 10^{23}$  1/моль — постоянная Авогадро.
- 6.15.  $v = 2P\tau / (mc) = 5 \cdot 10^{-3}$  м/с. 6.16.  $F_{\text{ср}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} E / (2ct) = 1,9$  Н.

### АТОМ И АТОМНОЕ ЯДРО

- 6.17.  $\lambda_{\max} = hc/E_2 = 5,7 \cdot 10^{-8}$  м. 6.18.  $v = h/(m\lambda) = 3,3$  м/с.
- 6.19.  $\varphi_{\max} = \arccos \frac{mv^2 + W_0 + 2W_1}{mv^2 + W_0 - 2W_1}$ .
- 6.20.  $v = v_0/2$ ;  $M = 3m_p$ ; тритию или гелию-3.
- 6.21.  ${}^{10}_5\text{B} + {}^4_2\alpha \rightarrow {}^{13}_7\text{N} + {}^1_0n$ ;  ${}^{13}_7\text{N} \rightarrow {}^{13}_6\text{C} + {}^0_1e$ .
- 6.22.  $E_n = \frac{m_\alpha}{m_n + m_\alpha} \left( Q + \frac{m_\alpha - m_D}{m_\alpha} E \right) = 12$  МэВ.

## ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ: РАВНОМЕРНОЕ И НЕРАВНОМЕРНОЕ

$$1. n < \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}}. \quad 2. \omega = \sqrt{\frac{\mu(M+m)g}{MR}}.$$

$$3. H_{\max} = \frac{50}{27} R = 1 \text{ м.}$$

## ЗАДАЧИ НА ЦЕНТР МАСС

$$1. F_n = \frac{m}{2} \left( g + \frac{3}{4} \frac{v^2}{l} \right). \quad 2. F_n = \omega^2 l \left( M + m \frac{l^2 - x^2}{2l^2} \right).$$

$$3. T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}. \quad 5. \alpha_{\max} = \arcsin \frac{m_2}{m_1}.$$

## ЗАДАЧИ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССОЙ

$$1. F = \sqrt{2} \rho S v^2. \quad 2. F = mg + mv^2/l. \quad 3. a = g \Delta h/l.$$

$$4. \Delta h = l \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

## ПЕРИОД ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

$$2. T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

## ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

$$1. v = \sqrt{2gH + (v_1^2 + v_2^2)/2}. \quad 2. v_{\min} = \sqrt{2\mu g l}.$$

$$3. \Delta l_{\max} = \frac{mg}{k} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{k}{m} \left( \frac{v}{g} \right)^2} \right) \approx 0,58 \text{ м.}$$

$$4. \mu = \frac{2m_1 v^2}{lg(m_1 + m_2)}. \quad 5. N = \frac{(Mg)^{3/2}}{2l} \left( \frac{RT}{\pi p M} \right) = 29,5 \text{ кВт.}$$

## ТЕПЛОЕМКОСТЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

$$1. p = 3,5 \cdot 10^3 \text{ Па.} \quad 2. C = 2R. \quad 3. A = -R(T_2 - T_1).$$

$$4. C = R \left( \frac{5}{2} - \frac{V}{V_0} \right). \quad 5. \alpha = 3/2.$$

### Когда кипит вода?

1.  $t_1 = 98,66^\circ \text{C}$ . 2.  $m_r = \frac{0,8\rho V}{\rho RT/(Mp) - 1} \approx 60 \text{ г}$ . 3.  $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{p_0}{4p_{\text{н}}} = \frac{3}{7}$ .  
 4.  $\gamma = \frac{\beta - \alpha}{(\varphi\beta/100\% - 1)\alpha} = \frac{5}{12}$ .

### ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

1.  $m_n = 2,05 \text{ кг}$ . 2.  $p = 0,81 \text{ атм}$ . 3.  $\alpha = 3/7$ . 4.  $p = 0,95 \text{ атм}$ . 5.  $\alpha = 75\%$ .  
 6.  $m_r = 6 \text{ г}$ . 7.  $Q = \Delta U + \nu R(T + \Delta T)/2$ . 8.  $\Delta m/m = 0,24\%$ .  
 9.  $p = 0,69 \text{ атм}$ .

### ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1. В области  $R_3 \leq r \leq \infty$   $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ,  
 $R_2 \leq r \leq R_3$   $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \text{const}$ ,  
 $R_1 \leq r \leq R_2$   $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right)$ ,  
 $0 \leq r \leq R_1$   $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right) = \text{const}$ .  
 2.  $A = \frac{qQ}{\epsilon_0 S} \left( a - \frac{d}{2} \right)$ .  
 3. В области  $0 \leq x \leq 2 \text{ (см)}$   $E = -10^5 \text{ В/м}$ ,  
 $2 \leq x \leq 12$   $E = 0$ ,  
 $12 \leq x \leq 20$   $E = -1,25 \cdot 10^4 \text{ В/м}$ .  
 4. От шара к Земле перетечет заряд  $Q = qR/L$ .

### КАТУШКИ ИНДУКТИВНОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

1.  $Q = \frac{\epsilon^2(L + CR_2^2)}{2(R_1 + R_2)^2}$ .  
 2.  $I_R = \frac{\epsilon_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} = 0,25 \text{ А}$ ; ток течет справа налево.  
 3. 1)  $\epsilon_s = \epsilon$ ; 2)  $R(t) = \frac{R_0}{1 + \frac{R_0 \epsilon_0 t}{L(\epsilon - \epsilon_0)}}$ .

$$4. 1) U_{m1} = I_0 \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{C}}; 2) U_{m2} = I_0 (L_1 + L_2) \sqrt{\frac{1}{C(\mu L_1 + L_2)}}.$$

### ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

$$1. x = F/2. \quad 2. \Gamma = 2.$$

$$3. F_1 = \frac{-ab\Gamma}{c - \Gamma(a+b)} = -\frac{12}{7} \text{ см}, \quad F_2 = \frac{bc}{b+c-a\Gamma} = \frac{48}{25} \text{ см}.$$

### ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

$$1. n_a = n_b + \lambda/L = 1,000297. \quad 2. \Delta y = L \frac{a/b}{1+b/d} = 16,7 \text{ см}.$$

$$3. v = hf\lambda/d = 4,5 \text{ мм/с}. \quad 4. \lambda_1 = 640 \text{ нм}, \lambda_2 = 457 \text{ нм}.$$

### ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА В ЗАДАЧАХ

$$1. \frac{\Delta N_1}{N_0} = 1 - 2^{-2/3} \approx 0,37; \quad \frac{\Delta N_2}{N_0} = 1 - 2^{-4/3} \approx 0,61.$$

$$2. E_T = \frac{m_\alpha}{m_T + m_\alpha} \Delta E = \frac{4}{7} \Delta E \approx 2,74 \text{ МэВ};$$

$$E_\alpha = \Delta E - E_T = \frac{3}{7} \Delta E \approx 2,06 \text{ МэВ}.$$

$$3. E_n = \frac{m_\alpha}{m_n + m_\alpha} \left( \Delta E + \frac{m_\alpha - m_D}{m_\alpha} E_D \right) \approx 14,9 \text{ МэВ}.$$

$$4. v_\alpha = \frac{E_T c}{E_\alpha} \approx 1,58 \cdot 10^3 \text{ км/с}.$$



Приложение к журналу «Квант» № 2/99  
**МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ  
ПО ФИЗИКЕ**

Под редакцией *А.И.Черноуцана*

Составитель *В.А.Тихомирова*

Редактор *В.А.Тихомирова*

Литературный редактор *Л.В.Кардасевич*

Технический редактор *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа

*Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

**ИБ №37**

Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр. Гарнитура кудряшевская.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,72.  
Заказ 576.

117296 Москва, Ленинский пр., 64-А  
«Квант»

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховском полиграфическом комбинате  
Комитета Российской Федерации по печати  
142300 г.Чехов Московской области  
Тел. (272) 71-336, факс (272) 62-536